

Wie wahrscheinlich sind die möglichen physikalischen Welten

Hans J. Pirner

24. Mai

Inhalt:

- (A) Der Zustandsraum (Ort, Geschwindigkeit) eines klassischen Gases von Atomen
- (B) Eine Sammlung von möglichen Welten: das Ensemble von Mikrozuständen
 - I. Entropie ($N, V, \langle E \rangle$)
 - II. Die Verteilungsfunktion eines Atoms $n(x, v)$
- (C) Eigenschaften der Verteilungsfunktion
- (D) Von den Wahrscheinlichkeiten zur Zustandsgleichung des idealen Gases

Beachte den Unterschied:

- Wahrscheinlich: p
- $0 \leq p \leq 1$
- $p(\text{leere Menge}) = 0$
- $p(\text{volle Menge}) = 1$
- Aber: für Teilmengen
- $A \cap B = \text{leere Menge}$
- $p(A \vee B) = p(A) + p(B)$
- Möglich: pos
- $0 \leq \text{pos} \leq 1$
- $\text{pos}(\text{leere Menge}) = 0$
- $\text{pos}(\text{volle Menge}) = 1$
- $\text{pos}(A \vee B) = \max(\text{pos}(A), \text{pos}(B))$

Würfel: $p(1 \vee (2,3)) = 1/6 + 2/6 = 1/2$, $\text{pos}(1 \vee (2,3)) = \max(1/6, 2/6) = 1/3$

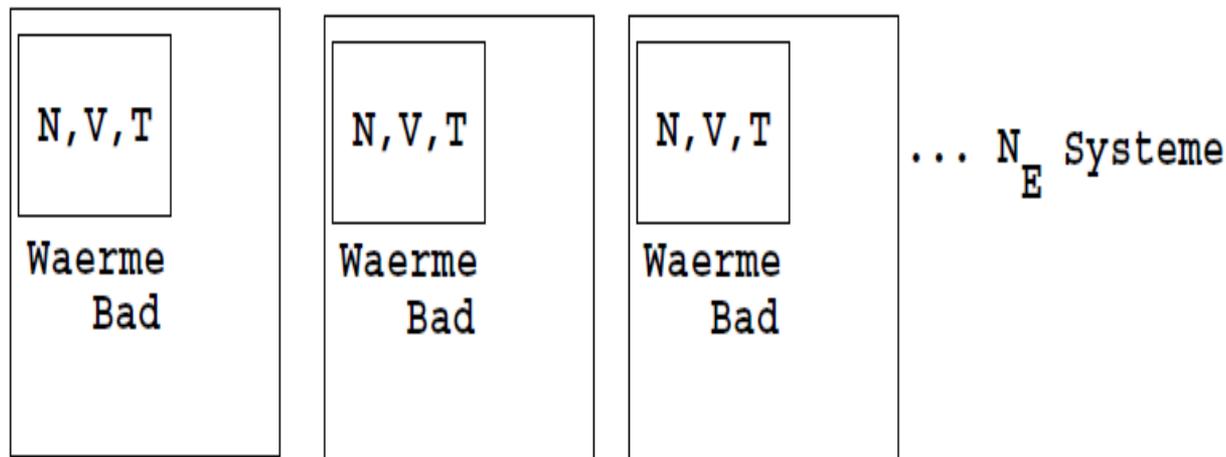
Außerdem im qualitativen Sinn: Alles was wahrscheinlich ist auch möglich, aber Möglichkeiten ergeben sich auch über den W -Bereich hinaus. W =möglich unter Einschränkungen

(A) Der Zustandsraum eines Gases:

- Teilchenzahl : $N \approx 10^{23}$ Atome
- Volumen: V des Vorlesungssaal
- Mittlere Energie: $\langle E \rangle$
- Der Zustandsraum ist dann $6N$ -dimensional
- Nämlich: Je Atom 3 –räumliche Koordinaten (x,y,z)
und 3 – Geschwindigkeiten (v_x,v_y,v_z)
- Man kann nicht die Bewegungsgleichungen aller Atome berechnen. Wir betrachten deshalb eine Schar möglicher Welten, die obigen Zwangsbedingungen genügen:

(B) Kanonische Ensemble möglicher Welten

Ein kanonisches Ensemble entspricht einer Gesamtheit von Systemen, die keinen Materieaustausch mit der Umgebung haben (sie sind im thermodynamischen Sinne geschlossen). Alle Systeme haben gleiche Teilchenzahl N und gleiches Volumen V Sie können jedoch Wärme durch diabatische Wände austauschen und befinden sich in Kontakt mit demselben Wärmereservoir der Temperatur T . Das kanonische Ensemble ist geeignet für die Berechnung von $\langle D \rangle_e$ bei Messungen an einem System mit festem N, V, T .



I. Entropie:

- Entropie S ist die potentielle Information, die wir über das System mit N -Atomen gewinnen können:

$$S = -\sum n(i) \ln n(i)$$

- wobei i die Zustände im $6N$ -dimensionalen Zustandsraum $(x_1, v_1, x_2, v_2, \dots, x_N, v_N)$ durchnumeriert
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $n(\dots)$ maximiert die Entropie unter gegebenen Nebenbedingungen $N, V, \langle E \rangle$

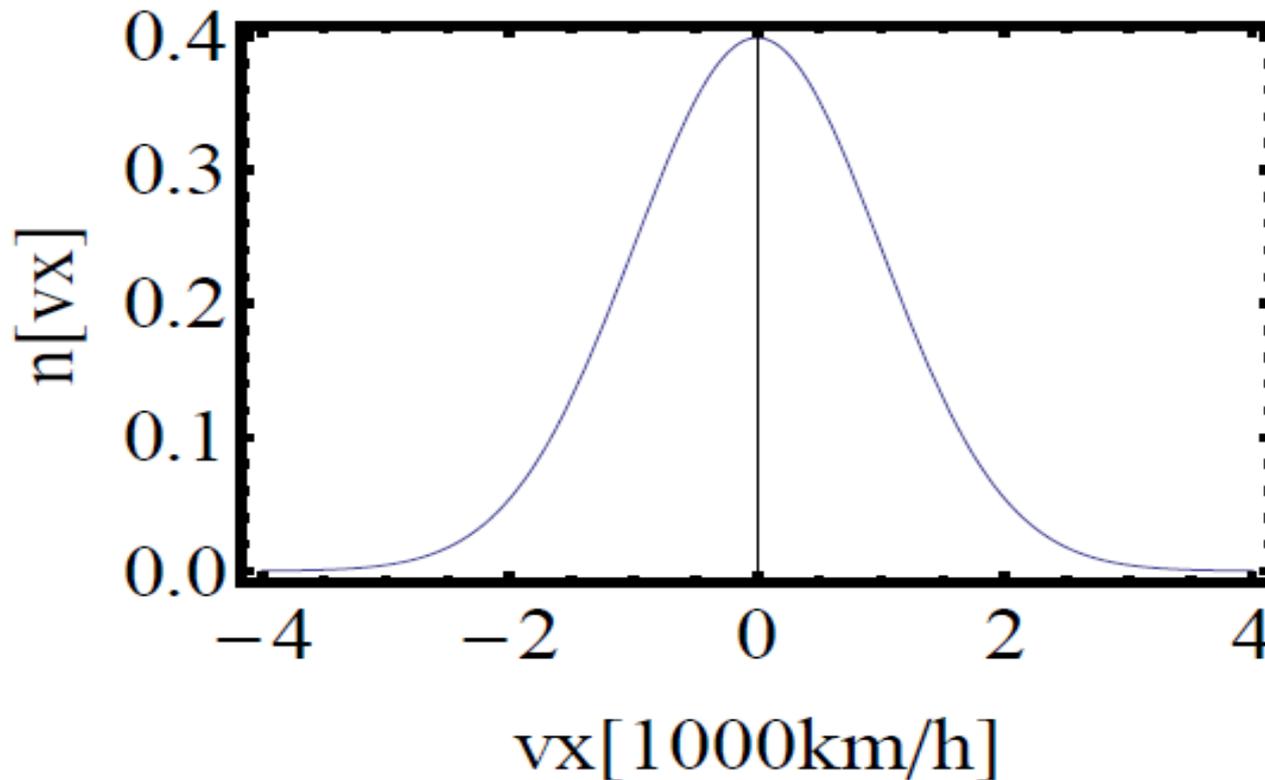
Eigenschaften der Entropie:

- Entropie eines abgeschlossenen Systems nimmt immer zu:
- Entropie schränkt ein, wieviel Arbeit ein System bei gegebener innerer Energie leisten kann:
Entropie wie Wasser in der Milch
- Die Erde importiert Sonnenwärme bei hoher Temperatur mit geringer Entropie und exportiert Wärme bei niedriger Temperatur mit hoher Entropie: deshalb Strukturbildung und Leben möglich

II. Wahrscheinlichkeits- Verteilung:

- N- Atome nicht wechselwirkend (ideales Gas)
- Verteilungsfunktion faktorisiert:
 $n(x_1, v_1, x_2, v_2, \dots) = n(x_1, v_1) n(x_2, v_2) \dots$
- $n(x_1, v_1) = 1/\text{Volumen} \cdot n(v_1)$
- Keine der drei Raumrichtungen ist bevorzugt:
- $n(v_1) = n(v_{1x}) n(v_{1y}) n(v_{1z})$
- $n(v_{1x}) = \text{Gauss Funktion, wie wir sie aus der Statistik kennen}$

Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung



Geschwindigkeitsverteilung in x-Richtung für ein Sauerstoffatom bei $T=293^\circ\text{K}$ (20°C)

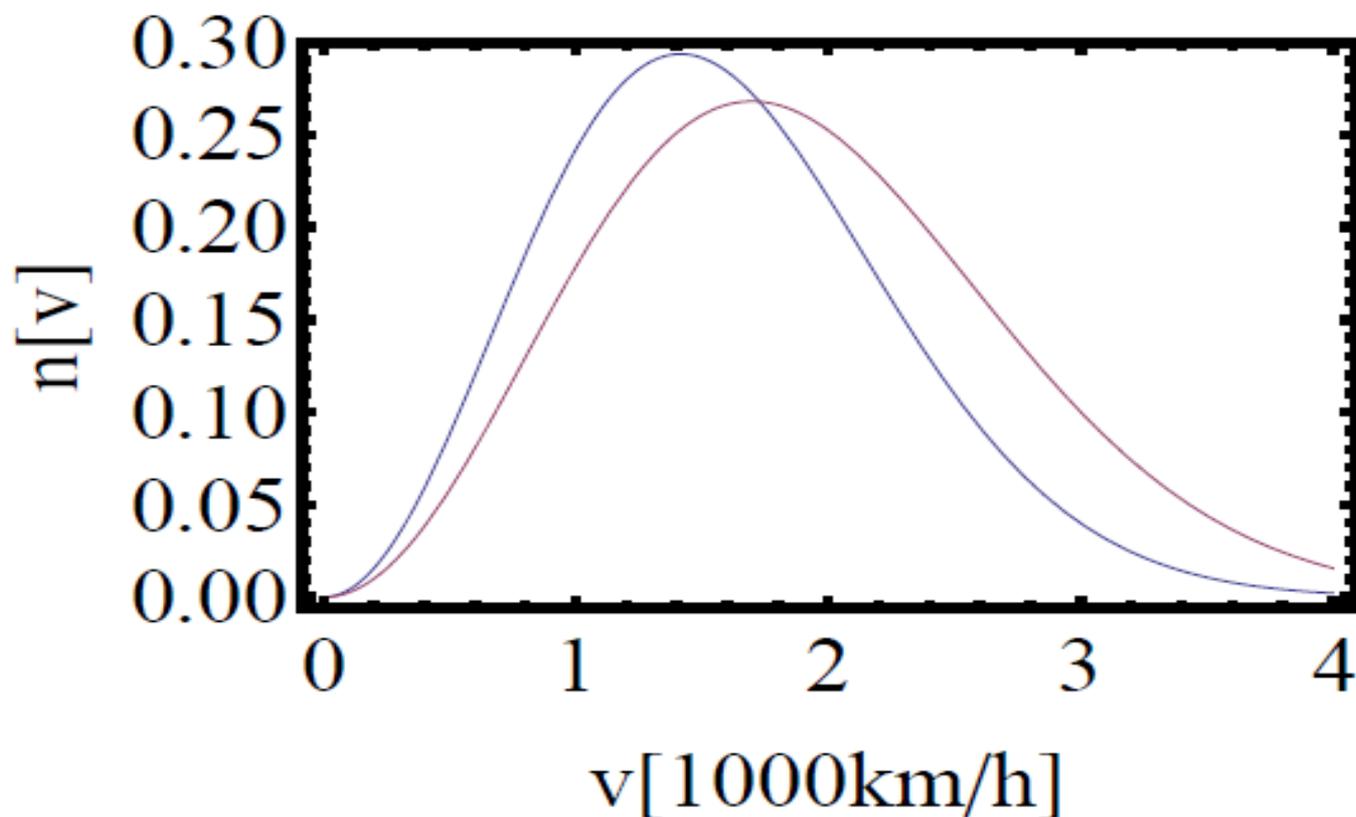
(C) Eigenschaften der Geschwindigkeitsverteilung

- $n(v) = c \exp[-1/2 M v^2 / (k T)] v^2 dv$
- Niedere und hohe kinetische Energien sind unterdrückt. ($dv_x dv_y dv_z = v^2 dv d\omega$)
- Mittleren Energie $\langle E \rangle / N = \langle 1/2 M v^2 \rangle = 3/2 k T,$

wobei T die Temperatur des Gases und k die Boltzmann Konstante ist.

- Je höher die Temperatur desto höhere Geschwindigkeiten sind möglich, desto breiter die Verteilung

Verteilung des Betrags der Geschwindigkeit v für $T=293^\circ\text{K}$ und $T=350^\circ\text{K}$



(D) Von der Statistik zu den Messgrößen:

- Temperatur tritt direkt auf,
- Volumen $V=L_x \cdot L_y \cdot L_z$ tritt direkt auf
- Druck P ergibt sich aus dem Impulsübertrag den die Atome auf die Wände ausüben:

Druck eines Atoms = Kraft / Fläche ($L_y L_z$) =
 $2 M v_x / t / \text{Fläche} = 2 M v_x / (2 L_x / v_x) / \text{Fläche}$

- Druck von N -Atomen: $P = N M \langle v_x^2 \rangle / V$

$$P = N k T / V$$

Beispiel:

- Autoreifen:
- Im kalten Zustand $T(\text{kalt})=283^{\circ}\text{K}$ (10°C)
- $P(\text{kalt})=300$ kPascal=3 bar (oder Atm)
- $T(\text{warm})=313$ °K (40°C)
- $P(\text{warm})=P(\text{kalt}) T(\text{warm})/T(\text{kalt})$
 $=332$ kPascal=3.32 bar (oderAtm)

Zusammenfassung:

- Wahrscheinlichkeiten erlauben mögliche Welten zu beschreiben, von denen wir nur globale Eigenschaften kennen ($N, V, \langle E \rangle$)
- Wir erhalten die Wahrscheinlichkeits- Verteilung eines idealen Gases von N -Atomen in einem Volumen V mit der Durchschnittsenergie $\langle E \rangle/N = 3/2k T$ erhalten.
- Die Atome sind gleichmäßig im Volumen und normal (Gauss-) in der Geschwindigkeit verteilt
- Messgrößen ergeben sich als Mittelwerte