

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Theoretische Physik III

Elektrodynamik

Georg Wolschin



Letzte Aktualisierung: 17. Dezember 2015

Vorwort

Diese Vorlesung ist gedacht als eine kurzgefasste Einführung in die klassische Elektrodynamik. Sie ist konzipiert als einsemestrige, vierstündige Veranstaltung für Bachelorstudenten. Primäre Adressaten sind Studierende ab dem dritten Semester, die den Mechanik-Grundkurs abgeschlossen haben und bereits mit einigen theoretischen Konzepten wie dem Lagrange-Formalismus der klassischen Mechanik vertraut sind. Vorausgesetzt wird ferner eine Grundkenntnis der Phänomene der Elektrodynamik.

Dazu gehört insbesondere das aus der Experimentalphysik bekannte Ampère'sche Gesetz (André-Marie Ampère 1826): Ein elektrischer Strom ruft ein ihm proportionales Magnetfeld hervor, dessen Richtung mit der des Stromes eine Rechtsschraube bildet. Mathematisch formuliert setzt es das Kurvenintegral des magnetischen Feldes um eine geschlossene Kurve in Beziehung zum Strom, der durch die von dieser Kurve eingeschlossene Fläche fließt. Der schottische Physiker James Clerk Maxwell leitete das Gesetz 1861 in seiner vierteiligen Arbeit *On physical lines of force* erneut her und berücksichtigte dabei den nach ihm benannten Verschiebungsstrom, so dass die Kontinuitätsgleichung erfüllt wird.

Dass Ströme und Magnetfelder sich gegenseitig bedingen, wird mit dem Faraday'schen Induktionsgesetz deutlich: Es beschreibt die Entstehung eines elektrischen Feldes bei Änderung der magnetischen Flussdichte. Die elektromagnetische Induktion entdeckte Michael Faraday 1831, als er versuchte, die Funktionsweise eines Elektromagneten – bei dem der Strom ein Magnetfeld erzeugt – umzukehren. Die Induktionswirkung nutzt man insbesondere bei elektrischen Maschinen wie Elektromotoren, Generatoren und Transformatoren.

Die Maxwell'schen Gleichungen (James Clerk Maxwell 1861) fassen die Gesetze von Ampère, Faraday und Gauß – die elektrische Ladungsdichte ist gleich der Divergenz der Feldstärke – mit der Quellenfreiheit des magnetischen Feldes in einer konsistenten mathematischen Formulierung zusammen. Sie bilden ein System von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und ermöglichen die präzise Beschreibung des Zusammenhanges der elektrischen und magnetischen Felder untereinander, sowie mit elektrischen Ladungen und Strömen bei Berücksichtigung der jeweiligen Randbedingungen. Sie bilden die Grundlage der klassischen Elektrodynamik.

Mit den Maxwell-Gleichungen – und der Lorentz-Kraft – lassen sich demnach die Phänomene der klassischen Elektrodynamik, sowie der Optik und Elektrotechnik erklären. Man kann sie in differenzieller Form, integraler Form, differenzialgeometrischer Form und in

kovarianter Form darstellen. In diesem Buch verwende ich eingangs die integrale Form, weil dies den direkten Anschluss an die Phänomene der Experimentalphysik ermöglicht, und gehe dann zur differentiellen Form über. Die kovariante Form wird erst in einem späteren Kapitel eingeführt.

Wie in theoretischen Darstellungen der klassischen Elektrodynamik meist üblich, wird ab Kap. 2 über Elektrostatik das Gauß'sche Maßsystem verwendet. In diesem Kapitel werden auch mathematische Werkzeuge – z. B. vollständige Funktionensysteme, Kugelflächenfunktionen, Legendre-Polynome – bereitgestellt bzw. wiederholt, die im folgenden insbesondere für die Multipolentwicklung notwendig sind. Elektrische Felder in Materie (Dielektrika) und an Grenzflächen werden diskutiert, ebenso die Feldenergie in Materie. Zur Lösung von Randwertproblemen insbesondere bei Metallen werden der Green'sche Satz und die Green'sche Funktion vorgestellt.

In der Magnetostatik (Kap. 3) untersuchen wir analog Phänomene, die durch zeitlich konstante Ströme entstehen und stationäre Magnetfelder hervorrufen. Das Ampère'sche und Biot-Savart'sche Gesetz werden vorgestellt, sowie – als Pendant zum skalaren Potenzial in der Elektrostatik – das Vektorpotenzial und seine Multipolentwicklung. Das magnetische Moment einer Stromverteilung wird eingeführt, und sein Zusammenhang mit dem Drehimpuls diskutiert. Wir untersuchen das Verhalten der Felder an Grenzflächen, und berechnen Energie und Kraft im magnetischen Feld.

Nach diesen Präliminarien über statische Felder kommen wir zur Elektrodynamik, in Kap. 4 zunächst zur speziellen Relativitätstheorie. Maxwell war noch von der Existenz des sogenannten 'luminophoren' Äthers (Lichtäthers) überzeugt – eines Trägermediums, das die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen durch den leeren Raum erklären sollte. Er hielt auch – wie seine Zeitgenossen – die Galilei-Transformation für selbstverständlich, so dass folglich die Lichtgeschwindigkeit von der Erdbewegung durch diesen Äther abhängen sollte.

Das Michelson-Morley-Experiment zeigte jedoch 1881–1887 mit großer Genauigkeit, dass die Lichtgeschwindigkeit nicht von der Richtung der Erdbewegung abhängt. Demnach gibt es kein ausgezeichnetes Bezugssystem; alle Bezugssysteme, die sich relativ zueinander gleichförmig bewegen, sind äquivalent. Mit der 1905 formulierten speziellen Relativitätstheorie zog Albert Einstein daraus als Erster die radikale Konsequenz, von einer Konstanz der Lichtgeschwindigkeit auszugehen, und die Galilei-Transformation zwischen Bezugssystemen durch die auch bei hohen Relativgeschwindigkeiten gültige Lorentz-Transformation zu ersetzen.

Damit war die Äthervorstellung überflüssig geworden. Zunächst wenig anschauliche Folgerungen aus der speziellen Relativität, wie die Zeitdilatation, konnten in der Folgezeit mit zunehmend höherer Genauigkeit experimentell bestätigt werden – es gibt heute keinerlei begründeten Zweifel an der Gültigkeit der Theorie. Beispielsweise wurde die Zeitdilatation 2014 mit einer relativen Genauigkeit von $\pm 2,3 \cdot 10^{-9}$ gemessen, und auch die Längenkontraktion ist in Schwerionenkollisionen bei sehr hohen Energien wie am Large Hadron Collider LHC des Forschungszentrums CERN in Genf indirekt bestimmbar.

Die Maxwell'sche Theorie blieb weiterhin die Basis der klassischen Elektrodynamik, da sich die Grundgleichungen als Lorentz-invariant erwiesen, sich demnach auch bei hohen Relativgeschwindigkeiten korrekt transformieren – obwohl sie ihr Erfinder nicht unter diesem Gesichtspunkt konstruiert hatte. Allerdings ist zur Erklärung von Quantenphänomenen eine Theorie jenseits der klassischen Elektrodynamik erforderlich, die Mitte des 20. Jahrhunderts entwickelte Quantenelektrodynamik (QED).

In Kap. 5 formulieren wir die Maxwell-Theorie im vierdimensionalen Minkowski-Raum. Man bildet dazu aus der elektrischen und magnetischen Feldstärke den Feldstärketensor, aus Ladungs- und Stromdichte die Viererstromdichte und aus skalarem und vektoriellm Potenzial das Viererpotenzial – aus dem sich wiederum die Felder berechnen lassen. Die Maxwell-Gleichungen können wir dann als Zusammenhang von Viererstromdichte und kovarianter Ableitung des Feldstärketensors darstellen, in Lorenz-Eichung (= verschwindender kovarianter Ableitung des Viererpotenzials) auch direkt als zweite Ableitung des Viererpotenzials.

Die in diesem Kapitel ebenfalls dargestellte Lagrange-Formulierung ermöglicht einen besonders eleganten Zugang zur Maxwell-Theorie, der auch eine neue Motivation der Grundgleichungen liefert: Homogene und inhomogene Maxwell-Gleichungen folgen hier aus der Forderung, dass die Variation der Wirkung verschwindet. Da in der kovarianten Formulierung das Verschwinden der Wirkung äquivalent ist zur relativistischen Euler-Lagrange-Gleichung, stellt sich die Maxwell-Theorie als eine relativistische Verallgemeinerung der Euler-Lagrange-Gleichung auf Felder dar.

In Kap. 6 besprechen wir die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen, die durch die Maxwell-Gleichungen – im Vakuum durch die daraus folgende d'Alembert'sche Wellengleichung – auch ohne jedes Trägermedium korrekt beschrieben wird. In Medien hängt die Wellenausbreitung von Dielektrizitätskonstante und Permeabilität des Mediums ab und folgt den Telegraphengleichungen, die sich aus den Grundgleichungen ableiten lassen. Spezielle Gesetze der Wellenausbreitung gelten in Leitern und Hohlleitern, sowie für

Reflexion und Brechung an Grenzflächen.

Zur Beschreibung bewegter Ladungen muss eine inhomogene Wellengleichung für das Viererpotenzial gelöst werden, Kap. 7. Eine wichtige Lösungsmethode benutzt die Green'sche Funktion, die jetzt jedoch – anders als in der Elektrostatik – von Ort und Zeit abhängt; wir bestimmen sie mit funktionentheoretischen Methoden (Residuensatz). Durch die endliche Laufzeit elektromagnetischer Information hängt das Potenzial von der Position des geladenen Teilchens zu früheren Zeiten ab. Als Folge dieser 'Retardierung' sind die elektrodynamischen Potenziale geladener Teilchen im allgemeinen Fall schwer zu berechnen.

Für bewegte Punktladungen ist das jedoch exakt möglich; die Potenziale wurden tatsächlich bereits 1898 von Liénard und unabhängig davon 1900 durch Wiechert abgeleitet, also bereits einige Jahre vor der Formulierung der speziellen Relativitätstheorie. Dennoch sind auch die Liénard-Wiechert-Potenziale relativistisch invariant – was jedoch nicht erstaunlich ist, da sie aus den Lorentz-invarianten Maxwell-Gleichungen folgen.

Aus den Potenzialen berechnen wir die zugehörigen Felder und auch die Larmor-Formel für die abgestrahlte Leistung einer langsam bewegten, beschleunigten Punktladung. Für die Abstrahlung schnell bewegter, beschleunigter Ladungen – beispielsweise Elektronen in kreisförmigen Teilchenbeschleunigern, die Synchrotronstrahlung erzeugen – ist die relativistische Larmor-Formel maßgebend, die sowohl den Effekt der Geschwindigkeit als auch der Beschleunigung auf die abgestrahlte Leistung enthält, ebenfalls bereits auf Liénard (1898) zurückgeht und die Biegung des Lichtkegels der Synchrotronstrahlung in Bewegungsrichtung korrekt beschreibt.

Schließlich diskutieren wir die Abstrahlung schwingender Ladungen in Kap. 8. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der elektrischen Dipolstrahlung, dem nach Heinrich Hertz benannten Hertz'schen Dipol. Die durch einen solchen schwingenden Dipol erzeugten Felder folgen direkt aus den Ausdrücken für die zeitabhängigen Potenziale. Die abgestrahlte Leistung lässt sich ebenfalls exakt berechnen, sie ist umgekehrt proportional zur vierten Potenz der Wellenlänge: Einem vergleichbaren Effekt verdankt der Himmel seine blaue Färbung.

Die Aufgaben am Ende des Buches (Kap. 9) sollen als Anreiz dienen, den Stoff dieses Kurses beispielhaft auch selbst nachzurechnen. Oft sind die Lösungen beigelegt, meistens jedoch nur die Ergebnisse gezeigt, so dass die Lösungswege selbst erarbeitet werden sollten, sich das Resultat jedoch kontrollieren lässt.

Dieter Gromes danke ich für eine kritische Durchsicht des Manuskripts. Die ursprüngliche \LaTeX -Version hat Dr. V. Kuchta nach meiner handschriftlichen Vorlage erstellt und auch

aus den meisten Tafelskizzen satzfertige Druckvorlagen gemacht. Die Aufgaben habe ich gemeinsam mit Dr. F. Nendzig ausgewählt, der manche der Übungen selber konzipiert hat, die Aufgaben mit Lösungen bzw. Ergebnissen samt Abb. 9.1 in \LaTeX übertragen hat, und bei der Textkorrektur mitwirkte. M. Wirschke hat die Copyediting-Korrekturen ausgeführt; die sorgfältige Schlussredaktion hat J. Hölck übernommen, und Abb. 2.12 gestaltet. Für die Betreuung des Projekts danke ich außerdem B. Alton und M. Maly vom Springer-Verlag. Hinweise auf dennoch verbleibende Ungenauigkeiten und Fehler bitte direkt an mich senden.

Heidelberg, im Dezember 2015

Georg Wolschin

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	9
1.1	Grundbegriffe der Elektrodynamik	11
1.2	Die Maxwell'schen Gleichungen	15
1.3	Materialgleichungen	18
1.4	Coulomb- und Lorentz-Kraft	19
1.5	Übergang zu Gauß'schen Einheiten	19
2	Elektrostatik	23
2.1	Elektrisches Feld und Potenzial	23
2.2	Coulomb-Kraft	25
2.3	Elektrostatische Energie	26
2.4	Mathematischer Einschub	28
2.5	Multipolentwicklung	35
2.5.1	Monopol, Dipol, Quadrupol	35
2.5.2	Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten	40
2.5.3	Lösung der Laplace-Gleichung	42
2.5.4	Lösung der Poisson-Gleichung	43
2.6	Dielektrika	45
2.7	Elektrizität auf Leitern	52
2.8	Kapazität und Kugelkondensator	53
2.9	Feldenergie in Materie	54
2.10	Bildladungen	56
2.11	Green'scher Satz und Green'sche Funktion	57
3	Magnetostatik	63
3.1	Ampère'sches Gesetz	64
3.2	Magnetischer Kraftfluss	64
3.3	Biot-Savart'sches Gesetz	65
3.4	Vektorpotenzial	68
3.5	Multipolentwicklung und magnetisches Moment	70
3.6	Magnetisierung von Medien	72
3.7	Energie und Kraft im magnetischen Feld	75
4	Spezielle Relativitätstheorie	77
4.1	Einführung und Lorentz-Transformation	77

4.2	Notation im Minkowski-Raum	85
4.3	Viererpotenzial, Relativitätsprinzip	88
4.4	Vierergeschwindigkeit und Viererimpuls, Invarianten	92
5	Vierdimensionale Formulierung der Elektrodynamik	99
5.1	Feldstärketensor	99
5.2	Energie-Impuls-Tensor des EM-Feldes	103
5.3	Lagrange-Formulierung	105
5.4	Lagrange-Dichte des EM-Feldes	108
6	Elektromagnetische Wellen	111
6.1	Wellen im Vakuum	111
6.2	Ebene Wellen	113
6.3	Elektromagnetische Wellen in Materie	118
6.3.1	Elektromagnetische Wellen in Leitern	121
6.3.2	Elektromagnetische Wellen in Hohlleitern	124
6.4	Wellenpakete	127
6.5	Reflexion und Brechung an Grenzflächen	130
7	Felder bewegter Ladungen – elektrodynamische Potenziale	133
7.1	Inhomogene Wellengleichungen und Green-Funktion	133
7.2	Bestimmung der Green-Funktion mit funktionentheoretischen Methoden	134
7.3	Liénard-Wiechert-Potenziale für bewegte Punktladungen	139
7.4	Felder bewegter Punktladungen, Larmor-Formel	141
8	Hertz'scher Dipol	147
8.1	Zeitabhängige Potenziale des Dipols	147
8.2	Zeitabhängige Felder	149
9	Aufgaben	153
	Literatur	209
	Index	211

1 Einführung

In der Elektrodynamik untersuchen wir elektrische und magnetische **Felder**, deren Erzeugung durch **Ladungen** und **Ströme**, ihre Ausbreitung in Form elektromagnetischer **Wellen** und ihre Wirkung auf Materie durch elektromagnetische **Kräfte**.

Die klassische Elektrodynamik ist eine der ältesten Naturwissenschaften. Der **Magnetismus** ist seit ca. 900 v. Chr. bekannt (Magnesia, Griechenland), Thales v. Milet beschrieb 600 v. Chr. **statische Elektrizität**, die beim Reiben eines Bernsteinstabes (Elektron) mit einem Pelztuch entstand. Zum Vergleich: Die **Hydrodynamik** wurde ca. 250 v. Chr. durch Archimedes begründet.

Magnetismus und **Elektrizität** hatte man jahrhundertlang als getrennte Phänomene angesehen; erst im 17. Jahrhundert wurden Zusammenhänge deutlich: 1681 wurde ein Schiff vom Blitz getroffen und die Kompassnadel wechselte die Richtung. **Ørsted**¹ beobachtete 1820, dass eine Magnetnadel von einem parallel zu ihr fließenden Strom senkrecht abgelenkt wurde. Im selben Jahr untersuchte als Erster **Ampère**² experimentell die Wechselwirkung von Strömen.

Faraday³ zeigte 1831, dass ein bewegter Magnet in einem Draht elektrischen Strom erzeugen kann, und formulierte das zugehörige **Induktionsgesetz** auch quantitativ – die Umkehrung des Ørsted’schen Experimentes war gelungen. Faraday entwickelte die Vorstellung, dass sich um stromdurchflossene Leiter ein magnetisches Feld mit zugehörigen Kraftlinien ausbildet – er entfernte sich dadurch von den seinerzeit gängigen Fernwirkungstheorien. Auf dem Induktionsgesetz beruhen zahlreiche technische Anwendungen wie in Generatoren und Transformatoren.

Erst 1861–65 formulierte **Maxwell**⁴ die vollständigen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes [3]. Er verwendete dabei das Faraday’sche Kraftlinienbild, stellte den mathematischen Zusammenhang zwischen Änderung des Magnetfeldes und elektrischem Strom her und erkannte die Bedeutung des Verschiebungsstromes. Jede zeitliche Änderung des elektrischen Feldes erzeugt ein Magnetfeld. Aus dem Wechselspiel von zeitlich veränderlichen elektrischen und magnetischen Feldern entstehen die elektromagnetischen Wellen.

¹Hans Christian Ørsted (*1777 Rudkøbing, +1851 Kopenhagen), dänischer Physiker und Chemiker.

²André-Marie Ampère (*1775 Lyon, +1836 Marseille), französischer Mathematiker und Physiker.

³Michael Faraday (*1791 Newington, +1867 Hampton Court Green), englischer Naturforscher.

⁴James Clerk Maxwell (*1831 Edinburgh, +1879 Cambridge), schottischer Physiker.

Mit den Maxwell'schen Gleichungen ließen sich alle bekannten elektrischen, magnetischen und optischen Phänomene sehr erfolgreich beschreiben. Die Gleichungen ändern jedoch ihre Form, wenn man sie durch Galilei-Transformation in ein relativ zum Ausgangssystem bewegtes Koordinatensystem transformiert; insbesondere ergäbe sich eine Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit vom Bezugssystem, wenn die Galilei-Transformation – die nur den Raum, nicht Raum und Zeit gemeinsam transformiert – universell gültig wäre.

Das **Michelson-Morley-Experiment** (Kap. 4) zeigte jedoch 1881/87, dass die Lichtgeschwindigkeit vom Bezugssystem unabhängig ist und demnach die Galilei-Transformation nicht universell gültig sein kann, sondern durch die **Lorentz-Transformation** ersetzt werden muss, bei der Raum **und** Zeit transformiert werden. Das neuartige Verständnis von Raum und Zeit – bei gleichzeitig unveränderten Maxwell-Gleichungen – erfuhr seinen Durchbruch in der **Einstein'schen**⁵ 1905 publizierten **speziellen Relativitätstheorie** [4], in deren Rahmen die Elektrodynamik nicht mehr vom Bezugssystem abhängig ist. Die Voraussagen dieser Theorie sind vielfach mit sehr hoher Genauigkeit bestätigt worden.

Maßsysteme

Lehrbücher der Elektrodynamik verwenden in der Regel das **Gauß'sche**⁶ Maßsystem oder das Internationale Einheitensystem **SI** (*Système international d'unités*). Es gibt jedoch auch andere Systeme wie beispielsweise das Heaviside-System, die rationale Version des Gauß-Systems.

Das **SI-System** wird im Ingenieurbereich bevorzugt, hat aber Nachteile:

So haben das **Elektrische Feld** \vec{E} und die **dielektrische Verschiebung** \vec{D} (beschreibt die Wirkung von \vec{E} auf Medien) im SI-System unterschiedliche Einheiten, ebenso das **magnetische Feld** \vec{B} und die magnetische Erregung \vec{H} .

Außerdem erscheinen im SI-System die Maßsystemfaktoren

$$\varepsilon_0 = 8,859 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}, \text{ **Dielektrizitätskonstante**, und}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}, \text{ **Permeabilitätskonstante** des Vakuums,}$$

die im Gauß'schen (cgs)-System gleich eins sind.

⁵Albert Einstein (*1879 Ulm, +1955 Princeton, New Jersey), theoretischer Physiker.

⁶Johann Carl Friedrich Gauß (*1777 Braunschweig, +1855 Göttingen), deutscher Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker.

Der Zusammenhang zwischen den Maßsystemen wird in Abschn. 1.5 dargestellt. Im Gauß-System treten Faktoren c (= Lichtgeschwindigkeit) explizit auf, insbesondere in den Maxwell-Gleichungen.

In diesem Buch verwenden wir in der Einleitung zunächst das SI-System, um die Kontinuität mit der Experimentalphysik zu wahren, gehen dann aber im Hauptteil zum Gauß-System über.

1.1 Grundbegriffe der Elektrodynamik

Ladungen und Ströme

Ladungsdichte:

$$\varrho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad \text{Raumladungsdichte}$$

Ladung im Volumen V : $q = \int_V d^3r \varrho(\vec{r})$.

Bei Punktladungen q_i mit Ortsvektoren \vec{r}_i :

$$\varrho(\vec{r}) = \sum_i q_i \delta^3(\vec{r}_i - \vec{r}),$$

mit der Deltafunktion $\delta^3(\vec{r}_0 - \vec{r})$,

$$\int_V d^3r f(\vec{r}) \delta^3(\vec{r}_0 - \vec{r}) = \begin{cases} f(\vec{r}_0), & \vec{r}_0 \in V \\ 0, & \vec{r}_0 \notin V \end{cases}.$$

Analog ist die **Flächenladungsdichte** $\sigma(\vec{r})$ definiert,

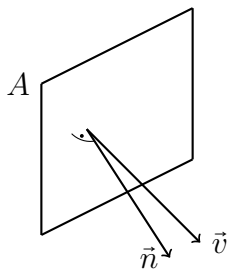
$$\sigma(\vec{r}) = \frac{dq}{dA}.$$

Strom I: Die Ladung dq , die pro Zeiteinheit dt durch A fließt:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Die Ladung dq , die in der Zeit dt durch die Fläche $\int_A d\vec{A}$ fließt (Abb. 1.1), ist

$$dq = \int_A \underbrace{d\vec{A}}_{\substack{\text{gerichtetes} \\ \text{Flächenelement} \\ d\vec{A} := \vec{n}dA}} \cdot \varrho \cdot \underbrace{\vec{v}dt}_{\substack{\text{zurückge-} \\ \text{legter Weg}},}$$



$\vec{v}(\vec{r}, t)$ = mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger.

Abb. 1.1 Ladungsfluss durch eine Fläche A

Der **Strom I** wird

$$I = \frac{dq}{dt} = \int_A d\vec{A} \varrho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \equiv \int_A d\vec{A} \vec{j}_q(\vec{r}, t)$$

mit der **Ladungsstromdichte** $\vec{j}_q = \varrho \vec{v}$.

Ladungserhaltung, Kontinuitätsgleichung

Für die elektrische **Ladung** gilt ein Erhaltungssatz, der in differenzieller Form durch eine Kontinuitätsgleichung ausgedrückt wird.

Die Gesamtladung im Volumen V ist

$$q(t) = \int_V d^3r \varrho(\vec{r}, t),$$

ihre zeitliche Änderung bei konstantem Volumen V ist

$$\frac{dq(t)}{dt} = \int_V d^3r \frac{\partial \varrho(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

und bewirkt einen Strom durch die Oberfläche A des Volumens V ,

$$\frac{dq(t)}{dt} = - \int_A d\vec{A} \vec{j}_q(\vec{r}, t) .$$

(Da der Strom durch die Oberfläche des Volumens eine Folge der *Abnahme der Ladung im Volumen* ist, ergibt sich hier ein zusätzliches Minuszeichen.)

Die **Einheit des Stromes** ist im SI-System das Ampere (A). Mit dem **Gauß'schen Satz**⁷

$$\int_V d^3r \vec{\nabla} \vec{a}(\vec{r}) \equiv \int_V d^3r \operatorname{div} \vec{a}(\vec{r}) = \int_A d\vec{A} \vec{a}(\vec{r})$$

⁷Der Satz wurde – wahrscheinlich zum ersten Mal – von Joseph Louis Lagrange im Jahre 1762 formuliert und unabhängig davon später von Carl Friedrich Gauß (1813), George Green (1825) und Michail Ostrogradsky (1831) neu entdeckt.

wird das

$$\frac{dq(t)}{dt} = \int_V d^3r \frac{\partial \varrho(\vec{r}, t)}{\partial t} = - \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_q(\vec{r}, t), \quad \forall V.$$

⇒ Gleichheit der Integranden, sofern dies für alle Volumina gilt:

$$\boxed{\frac{\partial \varrho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_q(\vec{r}, t) = 0} \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

Sie drückt die Ladungserhaltung in differenzieller Form aus.

Die **Ladungseinheit** ist im SI-System das Coulomb⁸ (C), z. B. ist die Elektronenladung

$$e = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

Der Zusammenhang zwischen der Einheit der Ladung und der des Stromes ist wegen $I = dq/dt$ gegeben durch $1 \text{ C} = 1 \text{ A s}$.

Ladungen und Ströme sind die Quellen der **Felder**. Ein **elektrisches Feld** übt auf Ladungen eine Kraft aus; die **elektrische Feldstärke** ist die Kraft pro Ladung.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

Im SI-System ist das **Newton** (N) die Einheit der Kraft, im Gauß'schen *cgs*-System (das wir im Hauptteil des Buches benutzen werden) **dyn**:

$$1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = 10^5 \text{ dyn} = 10^5 \frac{\text{cm g}}{\text{s}^2}.$$

Analog gilt für die Einheiten der Energie und der Leistung:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N m} = 10^5 \text{ dyn} \cdot 10^2 \text{ cm} = 10^7 \text{ erg},$$

$$1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{s}}.$$

Im SI-System ist die Einheit der Feldstärke $[\vec{E}] = \text{N/C}$.

Die **Spannung** ist das Integral über die Feldstärke

$$U := - \int_A^B d\vec{s} \cdot \vec{E},$$

und hat die Einheit $[U] = \text{N m/C} =: \text{V}$ (**Volt**⁹) so dass die **Einheit der Feldstärke** auch als $[\vec{E}] = \text{V/m}$ darstellbar ist.

⁸Charles Augustin de Coulomb (*1736 Angoulême, +1806 Paris), französischer Physiker.

⁹Alessandro Giuseppe Volta (*1745 Como, +1827 Como), italienischer Physiker.

Die Wirkung des Feldes \vec{E} auf Medien (inclusive Vakuum) ist die **dielektrische Verschiebung** \vec{D} : Eine von der Oberfläche A eingeschlossene Ladung q ruft durch ihr Feld \vec{E} einen Fluss \vec{D} hervor, dessen geschlossenes Flächenintegral (wieder) q ergibt

$$q = \int_V d^3r \rho = \oint_A d\vec{A} \vec{D} \quad d\vec{A} = \text{gerichtetes Flächenelement}; A = \partial V$$

Beispiel: $A =$ Kugel um q mit Radius $r \Rightarrow q = 4\pi r^2 |\vec{D}|$.

Einheit der **dielektrischen Verschiebung**: $[\vec{D}] = \frac{[\text{Ladung}]}{[\text{Fläche}]} = \text{C/m}^2$. Demnach haben im SI-System \vec{E} und \vec{D} unterschiedliche Einheiten (im Gauß-System: $[\vec{E}] = [\vec{D}]$).

Die **Stromdichte** $\vec{j}_q = \rho \vec{v}$ hat die Einheit

$$[\vec{j}_q] = \frac{\text{C}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{C}}{\text{m}^2 \text{s}}.$$

Die zeitliche Änderung der dielektrischen Verschiebung hat dieselbe Einheit:

$$[\dot{\vec{D}}] = \frac{\text{C}}{\text{m}^2 \text{s}}.$$

Dem entspricht ein sogenannter **Verschiebungsstrom**, der mit dem **Ladungsstrom** zum **Gesamtstrom** \vec{j} zusammengefasst wird:

$$\boxed{\text{Gesamtstromdichte} = \vec{j}_q + \dot{\vec{D}}}$$

Analog zur Ladung definiert man für **magnetische Felder** eine Polstärke

$$\text{Polstärke} = \frac{\text{magnet. Moment}}{\text{Abstand}} = \frac{\text{Strom} \cdot \text{Fläche}}{\text{Abstand}}$$

mit dem Ampere (A), der Einheit der Stromstärke

$$[\text{Polstärke}] = \frac{\text{A m}^2}{\text{m}} = \text{A m} \quad \left(1 \text{ A} = 1 \underbrace{\frac{\text{C}}{\text{m}^2 \text{s}}}_{[\vec{j}]} \cdot \underbrace{\text{m}^2}_{[A]} = 1 \frac{\text{C}}{\text{s}} \right).$$

Die **magnetische Feldstärke** (magnetische Induktion) \vec{B} wird analog zu \vec{E} definiert

$$\vec{B} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Polstärke}}, \quad [\vec{B}] = \frac{\text{N}}{\text{A m}}$$

oder mit der Spannungseinheit Volt

$$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{As}} \Rightarrow 1 \frac{\text{N}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}} \Rightarrow [\vec{B}] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}.$$

Die Wirkung des Magnetfeldes auf Medien wird (analog zu \vec{D}) durch ein Vektorfeld \vec{H} beschrieben (**magnetische Erregung**, heute meist magnetische Feldstärke). Analog zur dielektrischen Verschiebung (= Ladung/Fläche) ist

$$[\vec{H}] = \frac{[\text{Polstärke}]}{[\text{Fläche}]} = \frac{\text{A m}}{\text{m}^2} = \frac{\text{A}}{\text{m}} .$$

- Die Intensitätsgrößen \vec{E}, \vec{B} bestimmen, wie stark das elektromagnetische Feld ist.
- \vec{D} und \vec{H} bestimmen, wie das Medium darauf reagiert.

1.2 Die Maxwell'schen Gleichungen

Die **Maxwell-Gleichungen** sind die Axiome der Elektrodynamik, die auf der Verallgemeinerung empirischer Gesetze beruhen. Wir behandeln sie zunächst in **integraler** Form (so ist der physikalische Gehalt deutlicher), dann mithilfe der Sätze von **Gauß** und **Stokes** in differenzieller Form.

Wir gehen aus vom

- (1) **Faraday'schen Induktionsgesetz** [2]

$$\boxed{\int_A d\vec{A} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \oint_{\partial A} d\vec{s} \vec{E}} \quad \cong \text{eines der 4 Maxwell'schen Gesetze}$$

↑

zeitliche Änderung des magnetischen Flusses → elektrische Ringspannung (Umlaufspannung, geschlossene elektrische Feldlinien). Minuszeichen: **Lenz'sche Regel** (die Induktionsspannung wirkt ihrer Ursache entgegen [5])

- (2) und vom **Ampère'schen Gesetz** [1]

$$\boxed{\int_A d\vec{A} \vec{j} = \oint_{\partial A} d\vec{s} \vec{H}} .$$

Strom, der durch die Fläche A fließt (Abb. 1.2) \cong Integral des magnetischen Feldes um eine geschlossene Kurve, die A einschließt (Abb. 1.2).

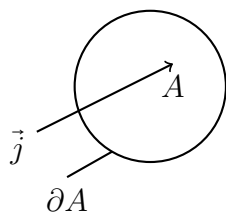


Abb. 1.2 Strom \vec{j} durch eine Fläche A mit Rand ∂A

(Ein Strom ruft ein ihm proportionales Magnetfeld hervor, dessen Richtung mit der des Stromes eine Rechtsschraube bildet).

- (3) In **Maxwells Erweiterung** des Ampère'schen Gesetzes ist dabei der **Verschiebungsstrom** berücksichtigt,

$$\vec{j} = \vec{j}_q + \dot{\vec{D}} \quad \text{mit} \quad \boxed{\oint_A d\vec{A} \vec{D} = q}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \oint_A d\vec{A} \vec{D} = \frac{dq}{dt} = - \int d\vec{A} \vec{j}_q .$$

Die Definition von \vec{D} ist im Einklang mit dem Ampère'schen Gesetz (auch mathematisch beweisbar¹⁰).

- (4) Das Magnetfeld hat keine Quellen ($\hat{=}$ keine magnet. Monopole): Ausgehend vom Induktionsgesetz verformen wir die Fläche A zu einer Halbkugel (Schale) und lassen dann ihre Öffnung zu einem Punkt schrumpfen (Abb. 1.3):

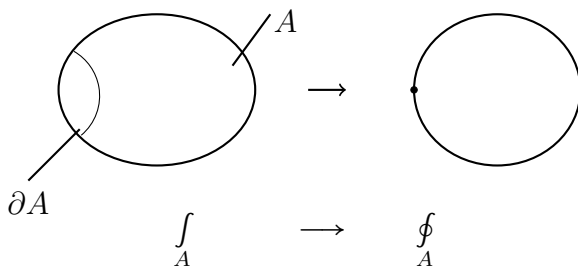


Abb. 1.3 Der magnetische Fluss durch jede geschlossene Fläche verschwindet

$$\frac{d}{dt} \oint_A d\vec{A} \vec{B} = - \oint_{\partial A} d\vec{s} \vec{E} = 0 \quad \text{Die Fläche ist jetzt geschlossen.}$$

$$\Rightarrow \oint d\vec{A} \vec{B} = \text{const}_t \quad (\text{zeitlich konstant}) \quad \forall \vec{B}, \text{ auch für } \vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_A d\vec{A} \vec{B} = 0} : \quad \text{Der magnetische Fluss durch jede geschlossene Fläche verschwindet.}$$

¹⁰Randwerte im Ampère'schen Gesetz zu Punkt schrumpfen $\Rightarrow \oint_A d\vec{A} \vec{j} = \oint_{\partial A} d\vec{s} \vec{H} = 0 \Rightarrow \oint_A d\vec{A} \vec{j}_q = - \oint_{\partial A} d\vec{A} \dot{\vec{D}}$. Bei zeitlich konstantem $A \Rightarrow \oint d\vec{A} \dot{\vec{D}} = \frac{d}{dt} \oint d\vec{A} \vec{D} \Rightarrow \oint d\vec{A} \vec{D} = - \int dt \oint d\vec{A} \vec{j}_q + \text{const}_t, \forall q \Rightarrow \text{const} = 0 \Rightarrow \oint_A d\vec{A} \vec{D} = q$

(1) - (4) ergeben die vier Maxwell-Gleichungen in integraler Form:

$\oint_A d\vec{A} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \oint_{\partial A} d\vec{s} \vec{E}$	Faraday'sches Induktionsgesetz
$\oint_A d\vec{A} \vec{j} = \oint_{\partial A} d\vec{s} \vec{H}$	Ampère'sches Gesetz (mit Verschiebungsstrom)
$\oint_A d\vec{A} \vec{D} = q$	Ladung als Quelle des elektrischen Feldes
$\oint_A d\vec{A} \vec{B} = 0$	Quellenfreiheit des Magnetfeldes

In Komponenten sind das acht Gleichungen. Sie lassen sich mit den Integralsätzen von **Stokes** und **Gauß** in differenzielle Form bringen. Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet A mit Rand ∂A ergibt der **Gauß'sche Satz**

$$\oint_A d\vec{A} \vec{D} = \int_V dV (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}), \quad \oint_A d\vec{A} \vec{B} = \int_V dV (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}),$$

(V das durch die Fläche A eingeschlossene Volumen) sowie der Stokes'sche Satz

$$\oint_{\partial A} d\vec{s} \vec{E} = \int_A d\vec{A} (\vec{\nabla} \times \vec{E}), \quad \oint_{\partial A} d\vec{s} \vec{H} = \int_A d\vec{A} (\vec{\nabla} \times \vec{H}).$$

Die Ladung q wird durch ein Volumenintegral der Ladungsdichte ausgedrückt,

$$\int_V dV \varrho = q \quad \forall V$$

und durch Gleichsetzen der Integranden folgen die Maxwell-Gleichungen in differenzieller Form:

(1) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$
(2) $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} = \vec{j}_q + \dot{\vec{D}}$
(3) $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho$
(4) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

Dazu kommt die Kontinuitätsgleichung:

$$\dot{\varrho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_q = 0.$$

1.3 Materialgleichungen

Die Maxwell-Gleichungen liefern acht Gleichungen für die 16 Größen $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{j}$ und ϱ .

Weitere Gleichungen sind also zur Verknüpfung der Felder nötig. Zunächst werden die sogenannten **Materialkonstanten** eingeführt

$$\text{Dielektrizitätskonstante } \varepsilon, [\varepsilon] = \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

$$\text{Permeabilitätskonstante } \mu, [\mu] = \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

$$\text{Leitfähigkeit } \sigma, [\sigma] = \frac{\text{A}}{\text{Vm}} =: \frac{1}{\Omega\text{m}}$$

$$\text{mit der Einheit } \mathbf{Ohm} \text{ des Widerstandes } 1\Omega = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}} ;$$

sie ist benannt nach Georg Simon Ohm¹¹. Die Konstanten für das Vakuum hatten wir bereits eingeführt; für Medien ist $\varepsilon > \varepsilon_0$. Für paramagnetische Medien ist $\mu > \mu_0$, für diamagnetische $\mu < \mu_0$.

Die Felder werden in der Regel näherungsweise **linear** durch die Materialkonstanten verknüpft:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j}_q = \sigma \vec{E}.$$

Damit werden die Maxwell-Gleichungen

$$(1) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \dot{\vec{H}}$$

$$(2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \dot{\vec{E}}$$

$$(3) \quad \vec{\nabla}(\varepsilon \vec{E}) = \varrho$$

$$(4) \quad \vec{\nabla}(\mu \vec{H}) = 0$$

d. h., acht Gleichungen für die sieben Größen \vec{E}, \vec{H} und ϱ . Derzeit ist also das Gleichungssystem noch überbestimmt; in der späteren kompakten Formulierung mit Potenzialen (skalares Potenzial und Vektorpotenzial) wird sich das zu vier Gleichungen für die vier unbekanntenen Potenzialfelder reduzieren.

¹¹Georg Simon Ohm (*1789 Erlangen, †1854 München), deutscher Physiker.

Die Kontinuitätsgleichung wird mit Materialkonstanten

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\sigma \vec{E}) = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{\sigma}{\varepsilon} \varepsilon \vec{E} \right) = \boxed{\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \varrho = 0},$$

sofern die Ortsabhängigkeit von σ und ε vernachlässigbar ist. Die Lösung der Differenzialgleichung ist (ohne äußere Spannungsquellen)

$$\varrho(t) = \varrho_0 e^{-\sigma t / \varepsilon} = \varrho_0 e^{-t / \tau} \quad \text{mit} \quad \tau := \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad \text{Relaxationszeit;}$$

für ideale Leiter mit $\sigma \rightarrow \infty \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow \varrho = 0$ bereits für kleine Zeiten.

1.4 Coulomb- und Lorentz-Kraft

Das elektrische Feld \vec{E} und die magnetische Induktion \vec{B} bewirken auf eine Ladung q , die sich am Ort \vec{r} mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegt, die Kraft

$$\boxed{\vec{F} = q \vec{E}(\vec{r}) + q(\vec{v} \times \vec{B})}$$

\uparrow \uparrow
 Coulomb-Kraft Lorentz-Kraft

(dabei rühren \vec{E} und \vec{B} nicht von q her; die von q erzeugten Felder bewirken zusätzlich eine Reaktionskraft).

Die Kraftdichte (Kraft auf ein kleines Volumen) ist:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \varrho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) + \vec{j}_q(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}).$$

1.5 Übergang zu Gauß'schen Einheiten

Im SI hatten wir die Einheiten C, A, V und Ω eingeführt sowie die Materialkonstanten ε, μ (bzw. ε_0, μ_0 für das Vakuum).

Im Gauß-System sind $\mu_0 = \varepsilon_0 = 1$, so dass die sogenannte Verkettungskonstante $\gamma := c \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ den Wert $\gamma = c$ hat, während im SI $\gamma = 1$ gilt. Dabei ist die Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum

$$\boxed{c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}}.$$

Zur Umrechnung von Maßsystemen ineinander sind vier Konstanten erforderlich:

System	ε_0	μ_0	γ	ψ
Gauß	1	1	c	1
Heaviside-Lorentz	1	1	c	4π
SI	$(c^2 \mu_0)^{-1}$	$\frac{4\pi}{10^7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$	1	4π

Maßsysteme mit $\psi = 4\pi$ heißen rational, solche mit $\psi = 1$ irrational. Es ist

$$\vec{E}_{\text{SI}} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0} E_{\text{G}}; \quad 1 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 10^{-4} \frac{\sqrt{\text{dyn}}}{\text{cm}}$$

$$\vec{B}_{\text{SI}} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} B_{\text{G}}; \quad 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 10^4 \frac{\sqrt{\text{dyn}}}{\text{cm}} = 10^4 \text{ G (Gauß)} = 1 \text{ T (Tesla, im SI)}$$

$\Rightarrow \vec{E}$ und \vec{B} -Felder haben im Gauß-System gleiche Einheiten (\vec{D} , \vec{H} analog). Die Elementarladung ist

$$e_0^{\text{G}} = 4,803 \cdot 10^{-10} \sqrt{\text{dyn}} \text{ cm} = 4,803 \cdot 10^{-10} \text{ esu},$$

$$e_0^{\text{SI}} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ A s}.$$

Im Gauß-System werden die Maxwell-Gleichungen

$$(1) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{B}}$$

$$(2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_q + \frac{1}{c} \dot{\vec{D}}$$

$$(3) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \varrho$$

$$(4) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Im Vakuum ist $\vec{E} = \vec{D}$ und $\vec{B} = \vec{H}$. Weitere Einheiten im Gauß-System sind:

$$\text{Ladungsdichte} \quad [\varrho] = \frac{\sqrt{\text{dyn}}}{\text{cm}^2}$$

$$\text{Stromdichte} \quad [\vec{j}] = \frac{\sqrt{\text{dyn}}}{\text{cm s}}$$

$$\text{Ladung} \quad [q] = [\varrho] [r]^3 = \sqrt{\text{dyn}} \text{ cm}$$

$$\text{Stromdichte} \quad [I] = [\vec{j}] [r]^2 = \frac{\sqrt{\text{dyn}} \text{ cm}}{\text{s}}$$

$$\text{Kraft} \quad [F] = [q] [\vec{E}] = \sqrt{\text{dyn}} \text{ cm} \cdot \frac{\sqrt{\text{dyn}}}{\text{cm}} = \text{dyn}$$

Literatur

- [1] Ampère, A. M.: Recueil d'observations électro-dynamiques. Chez Crochard, Cloître Saint-Benoît (1822)
- [2] Faraday, M.: Experimental Researches in Electricity. Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the Year MDCCCXXXII. V, 125 (1832)
- [3] Maxwell, J. C.: A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field. Philosophical Transactions of the Royal Society 155, 459 (1865)
- [4] Einstein, A.: Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Ann. Physik 17, 891 (1905)
- [5] Lenz, E.: Ueber die Bestimmung der Richtung der durch elektrodynamische Vertheilung erregten galvanischen Ströme. Ann. Physik und Chemie 107, 483 (1834)

2 Elektrostatik

In **zeitunabhängigen** Feldern hängen die elektromagnetischen Variablen nur vom Ort ab, $\rho = \rho(\vec{r}), \vec{j} = \vec{j}(\vec{r}); \vec{E} = \vec{E}(\vec{r}); \vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$.

Die Kontinuitätsgleichung vereinfacht sich zu $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_q(\vec{r}) = 0$, und die Maxwell-Gleichungen im Vakuum ($\vec{E} \equiv \vec{D}, \vec{B} \equiv \vec{H}$) werden

$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_q(\vec{r})$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi \rho(\vec{r})$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$

\Downarrow Elektrostatik	\Downarrow Magnetostatik
elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r})$ und Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ als Variable; $\vec{B} = 0$ ($\Leftrightarrow \vec{j}_q = 0$: keine Ströme bzw. Ströme werden ignoriert)	magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r})$ und Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ als Variable

2.1 Elektrisches Feld und Potenzial

Zur Einführung des **elektrischen Potenzials** betrachten wir das Wegintegral des \vec{E} -Feldes auf zwei unterschiedlichen Wegen (Abb. 2.1).

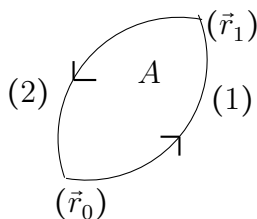


Abb. 2.1 Wegintegral auf zwei unterschiedlichen Wegen

$$\int_{\vec{r}_0(1)}^{\vec{r}_1} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0(2)}^{\vec{r}_1} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} + \oint_C \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}$$

Mit dem **Stokes'schen¹² Satz** und der Maxwellgleichung für ein statisches \vec{E} -Feld verschwindet das Integral über den geschlossenen Weg,

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})) d\vec{A} \stackrel{\text{Maxwell}}{=} 0$$

¹²George Gabriel Stokes (*1819 Skreen, †1903 Cambridge), irischer Mathematiker und Physiker.

\implies das Integral ist im statischen Fall **wegunabhängig**. Man definiert das **elektrische Potenzial** dann als

$$\Phi(\vec{r}) := - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') d\vec{r}' + \Phi(\vec{r}_0)$$

mit konstantem $\Phi(\vec{r}_0)$, so dass $d\Phi(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})d\vec{r}$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}),$$

und mit der Maxwell-Gleichung $\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\rho$ folgt die **Poisson-Gleichung**

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$$

für den Zusammenhang zwischen **Ladung** und elektrischem **Potenzial**.

Den Zusammenhang zwischen **Ladung** und **elektrischen Fluss** durch die Oberfläche A erhalten wir durch Integration der Maxwell-Gleichung für das \vec{E} -Feld über das Volumen:

$$\int_V d^3r \vec{\nabla}\vec{E}(\vec{r}) = 4\pi \int_V d^3r \rho(\vec{r}) = 4\pi q$$

und durch Umwandlung des Volumenintegrals in ein Oberflächenintegral mit dem Gauß'schen Satz folgt für $A = \partial V$

$$\int_A d\vec{A} \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi q \equiv \text{elektrischer Fluss.}$$

Der **elektrische Fluss** durch die Oberfläche A ist demnach das 4π -fache der Ladung im eingeschlossenen Volumen V . Für eine **Punktladung** im Ursprung folgt z. B.

$$\int_A d\vec{A} \vec{E}(\vec{r}) \stackrel{\text{Kugelsymm.}}{=} 4\pi r^2 E(r) = 4\pi q$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{q}{r^2}, \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^3} q$$

(siehe auch Einleitung; dort jedoch im SI, hier im Gauß-System.)

Aufgrund der Rotationssymmetrie hängt das **Potenzial** ebenfalls nur von r ab, so dass

$$\vec{\nabla}\Phi(r) = \frac{\vec{r}}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} = -\vec{E}(\vec{r}),$$

und durch Integration

$$\Rightarrow \Phi(r) = \frac{q}{r} + \text{const}.$$

Potenzial von Ladungsverteilungen

Bei mehreren Punktladungen q_i an Orten \vec{r}_i wird das Potenzial analog

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|},$$

und die elektrische Feldstärke

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r} - \vec{r}_i).$$

(Die Maxwell-Gleichungen sind linear in Feldern und Quellen \Rightarrow Felder können linear superponiert werden.)

Beim Übergang zu **kontinuierlichen** Ladungsverteilungen mit Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ wird aus der Summe ein Integral,

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{Potenzial,} \\ \vec{E}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \text{elektrisches Feld.} \end{aligned}$$

Es gilt auch hier die **Poisson-Gleichung**, $\boxed{\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})}$, und mit den expliziten Ausdrücken für Φ (s.o.) und ρ :

$$\int_V d^3r' \rho(\vec{r}') \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad \forall V$$

\Rightarrow auch die Integranden müssen gleich sein,

$$\boxed{\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')}.$$

In ladungsfreien Gebieten folgt die **Laplace¹³-Gleichung** $\boxed{\Delta\Phi = 0}$.

2.2 Coulomb-Kraft

Die elektrische Kraft auf eine Ladung q_i im elektrischen Feld am Ort \vec{r}_i ist:

$$\vec{F}_i = q_i \vec{E}(\vec{r}_i)$$

¹³Pierre-Simon Laplace (★1749 Beaumont-en-Auge, †1827 Paris), französischer Mathematiker, Physiker und Astronom.

(im Feld \vec{E} ist nicht das von der Ladung selbst erzeugte Feld enthalten).

Die **Coulomb-Kraft**, die auf eine Ladung q_1 am Ort \vec{r}_1 aufgrund einer zweiten Ladung q_2 am Ort \vec{r}_2 wirkt, ist

$$\vec{F}_{12} = q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

für Ladungen, deren Ausdehnung klein ist gegenüber ihrem Abstand $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$.

Bei mehreren Ladungen gibt es eine **lineare Superposition** der Kräfte, d. h., auf eine Ladung q am Ort \vec{r} wirkt eine Gesamtkraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = q \vec{E}(\vec{r}) = q \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r} - \vec{r}_i) = q \sum_{i=1}^N q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3},$$

und beim Übergang zu einer **kontinuierlichen** Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) d^3 r$ wird aus der Summe ein Integral,

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = q \int d^3 r' \underbrace{\rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}_{\equiv \vec{E}(\vec{r})}}.$$

Umgekehrt erhält man daraus den Punktladungsfall, indem man die Dichte diskretisiert:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i).$$

Bei dicht gepackten Ladungen muss der Beitrag der Ladungsdichte zum Potenzial Φ und elektrischem Feld \vec{E} am gleichen Ort berücksichtigt werden.

2.3 Elektrostatistische Energie

Im Fall diskreter Ladungen q_i ist die elektrostatistische **potenzielle Energie**

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi_i(\vec{r}_i) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

und die **Kraft** auf eine Ladung q_i am Ort \vec{r}_i (prüfen durch Einsetzen und Differenzieren)

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} U.$$

Im **Kontinuum** wird das mit $(\vec{\nabla} \vec{E})\Phi = \vec{\nabla}(\vec{E}\Phi) - \vec{E}\vec{\nabla}\Phi$:

$$U = \frac{1}{2} \int d^3 r \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) \stackrel{\text{MWG}}{\equiv} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho}{8\pi} \int d^3 r [\vec{\nabla} \vec{E}(\vec{r})] \Phi(\vec{r})$$

$$\stackrel{\text{Satz v. Gauß}}{=} \frac{1}{8\pi} \int_A d\vec{A} \vec{E}(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) - \frac{1}{8\pi} \int d^3 r \underbrace{\vec{E}(\vec{r}) \vec{\nabla} \Phi(\vec{r})}_{= -\vec{E}(\vec{r})}.$$

Beispiel: Sei eine kontinuierliche, homogene Ladungsverteilung in einer Kugel vom Radius R eingeschlossen. Für $R \rightarrow \infty$ gilt wegen $\Phi \propto 1/R$, $E \propto 1/R^2$, $\int_A d\vec{A} \vec{E} \Phi \propto 1/R \rightarrow 0$.

\Rightarrow Die **elektrostatische Energie** wird

$$U = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}^2(\vec{r}).$$

Allgemein lässt sich die elektrostatische Energie als Integral der Energiedichte $u(\vec{r})$ schreiben

$$U = \int d^3r u(\vec{r}).$$

Im vorherigen Spezialfall (Beispiel) identifizieren wir demnach

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} \vec{E}^2(\vec{r}).$$

Aus der elektrostatischen Energie bestimmt man auch den sogenannten **klassischen Elektronenradius**. (Beachte jedoch: Das Elektron ist ein Punktteilchen und hat keinen Radius wie z. B. das Proton).

Die **elektrostatische Energie** des Elektrons wird bei gleichmäßiger Verteilung der Ladung e auf einer Kugeloberfläche mit Radius \hat{R}_e (die Feldstärke im Innern ist Null):

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r E_{e(r)}^2 = \frac{1}{8\pi} \int_{\hat{R}_e}^{\infty} \int_{\Omega} d^3r \left(\frac{e}{r^2} \right)^2 \\ &= \frac{4\pi}{8\pi} \frac{e^2}{\hat{R}_e} = \frac{e^2}{2\hat{R}_e}, \text{ elektrostatische Energie des Elektrons.} \end{aligned}$$

Diese Feldenergie des Elektrons soll mit seiner Ruheenergie übereinstimmen,

$$\frac{e^2}{2\hat{R}_e} = m_e c^2 \Rightarrow \hat{R}_e = \frac{e^2}{2m_e c^2}.$$

In natürlichen Einheiten¹⁴ ergibt das mit $\hbar \equiv c \equiv 1$, $\text{MeV} \cdot \text{fm} = 1/(197,32)$, $1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm}$, $e^2 \cong 1/137$, $m_e \cong 0,511 \text{ MeV}$:

$$\hat{R}_e = \frac{197,32}{137 \cdot 2 \cdot 0,511} \text{ fm} \cong 1,41 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

¹⁴Maßsystem Teilchenphysik: $\hbar \equiv c \equiv 1$; $\hbar = 6,582 \cdot 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s}$, $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow \hbar c = 197,32 \cdot 10^{-15} \text{ MeV} \cdot \text{m} = 197,32 \cdot 10^{-13} \text{ MeV} \cdot \text{cm} = 197,32 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$; für $\hbar \equiv c \equiv 1 \Rightarrow \text{MeV} \cdot \text{fm} \cong 1/(197,32)$

In der Literatur [2] wird jedoch in der Regel der doppelte Wert als klassischer Elektronenradius bezeichnet, $R_e = 2\hat{R}_e$:

$$R_e = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2,818 \cdot 10^{-13} \text{ cm (im Gauß-System)}.$$

Es handelt sich dabei um eine mit der elektrostatischen Energie des Elektrons **assozierte Länge**, nicht wirklich um einen Radius. Analog ergibt sich bei Annahme einer **homogenen** Ladungsverteilung für den klassischen Elektronenradius: $R_e^{\text{hom}} \cong 1,2\hat{R}_e$.

2.4 Mathematischer Einschub

Zur Vorbereitung des nächsten Kapitels über Multipolentwicklung stellen wir nun einige mathematische Werkzeuge bereit, die dazu erforderlich sind. Insbesondere betrifft das vollständige Funktionensysteme, Kugelflächenfunktionen und Legendre-Polynome¹⁵.

In der theoretischen Physik beschreibt man Funktionen $f(\vec{r})$ einer Vektorvariablen $\vec{r} \equiv (x, y, z) \equiv (r, \vartheta, \varphi)_{\text{Kugel}}$ oft durch sogenannte **vollständige orthogonale Funktionensysteme**.

Dies ist analog zur Darstellung eines Vektors \vec{a} durch paarweise orthogonale (oder ortho-normale) Einheitsvektoren \vec{e}_i , $1 \leq i \leq N$:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^N a_i \vec{e}_i ; \text{ mit } a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i, \quad |\vec{e}_i| = 1$$

Normierung: Einheitsvektor

Für drei kartesische Koordinaten:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3, \quad a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i.$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos[\angle(\vec{a}, \vec{b})]$$

$$\text{mit } |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Die Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind genau dann orthogonal (d. h. $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$), wenn ihr Skalarprodukt verschwindet:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

¹⁵Adrien-Marie Legendre (*1752 in Paris, +1833 Paris), französischer Mathematiker.

Das Skalarprodukt ist **kommutativ** (symmetrisch: $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$) und **bilinear**, d. h., es gilt das **Assoziativgesetz** für die Multiplikation mit Skalaren:

$$(r\vec{a}) \cdot \vec{b} = r(\vec{a}\vec{b}) = \vec{a} \cdot r\vec{b} \quad \forall r \in \mathbb{R}, \forall \text{ Vektoren } \vec{a}, \vec{b}$$

sowie das **Distributivgesetz** (das Skalarprodukt ist additiv in jedem Argument):

$$\left. \begin{aligned} \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} \\ (\vec{a} + \vec{b})\vec{c} &= \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} \end{aligned} \right\} \forall \text{ Vektoren } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$

Begriffe und Schreibweisen:

Basis: \vec{e}_i

Orthogonalität: $\vec{e}_i\vec{e}_j = \delta_{ij}$

Vollständigkeit: $\sum_i (\vec{e}_i)_i (\vec{e}_i)_m = \delta_{lm}$

Darstellung: $\vec{a} = \sum_i \vec{e}_i (\vec{a}\vec{e}_i)$.

Die Notation $(\vec{a})_j$ steht hier für die j -te Komponente des Vektors \vec{a} , z. B. ist $(\vec{e}_i)_j = \delta_{ij}$. Analog zur **Darstellung** eines Vektors in einer (vollständigen) Basis von Einheitsvektoren lassen sich sogenannte **quadratintegrale Funktionen** $f(\vec{r})$ mit $\int d^3r |f(\vec{r})|^2 < \infty$ nach einem **vollständigen orthogonalen Funktionensystem** entwickeln.

Definiere zunächst ein **Skalarprodukt** zweier quadratintegraler Funktionen f, g über einem reellen Intervall $[a, b]$ als

$$\boxed{(f, g) := \int_a^b dx f(x) g^*(x)} \quad * = \text{komplexe Konjugation}$$

und analog in 3d:

$$\boxed{(f, g) := \int d^3r f(\vec{r}) g^*(\vec{r})}$$

(f, g) erfüllt die bei **Vektoren** diskutierten **Eigenschaften** eines Skalarproduktes. Entsprechend sind zwei (von Null verschiedene) Funktionen genau dann **orthogonal** zueinander, wenn das Skalarprodukt verschwindet:

$$\boxed{f, g \text{ orthogonal} \Leftrightarrow (f, g) = 0}.$$

Eine Funktion f heißt **normiert**, wenn $(f, f) = 1$.

Für den **Vektorraum** der quadratintegralen Funktionen gibt es ein **Basisssystem** (= vollständiges Orthogonalsystem), das folgende Eigenschaften hat:

1. Die Basis besteht aus abzählbar vielen Funktionen $\{u_N(\vec{r})\}$

2. Die u_i sind **orthonormiert**: $(u_i, u_j) = \delta_{ij}$

3. Jede quadratintegrale Funktion $f(\vec{r})$ lässt sich nach dem Basissystem entwickeln:

$$\boxed{f(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N a_i u_i(\vec{r})} \quad \text{Darstellung von } f(\vec{r}) \text{ in der Basis } \{u_N(\vec{r})\}.$$

Die **Entwicklungskoeffizienten** a_m ergeben sich als Skalarprodukt von f mit den u_m :

$$\begin{aligned} (f, u_m) &= \int d^3r f(\vec{r}) u_m^*(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N a_i \int d^3r u_i(\vec{r}) u_m^*(\vec{r}) \\ &= \sum_{i=1}^N a_i \delta_{im} = \boxed{a_m = (f, u_m)}. \end{aligned}$$

Im Allgemeinen wird eine **unendliche** Summe für die Konvergenz notwendig sein. (Bei überabzählbaren Basissystemen wird die Summe durch ein Integral ersetzt.)

⇒ **Forderung**: Die Reihendarstellung soll gegen die Funktion konvergieren gemäß

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int d^3r |f(\vec{r}) - \sum_{i=1}^N a_i u_i(\vec{r})|^2 = 0$$

Mit $|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - a^*b - b^*a$ wird das

$$\begin{aligned} &\int d^3r \left[|f|^2 + \sum_{i,j=1}^N a_i a_j^* \underbrace{u_i u_j}_{=\delta_{ij}} - f^* \underbrace{\sum_{i=1}^N a_i u_i}_{=\sum_{i=1}^N |a_i|^2} - f \underbrace{\sum_{i=1}^N a_i^* u_i^*}_{=\sum_{i=1}^N |a_i|^2} \right] \\ &= \int d^3r |f(\vec{r})|^2 - \sum_{i=1}^N |a_i|^2 \\ &\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^N |a_i|^2 \leq \int d^3r |f(\vec{r})|^2} \quad \text{Bessel'sche Ungleichung} \end{aligned}$$

(Da das Integral über den nichtnegativen Ausdruck $|f(\vec{r}) - \sum_{i=1}^N a_i u_i|^2$ notwendigerweise nichtnegativ ist.)¹⁶

Um die Konvergenzforderung zu erfüllen, muss im Limes $N \rightarrow \infty$ das Gleichheitszeichen gelten,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N |a_i|^2 = \int d^3r |f(\vec{r})|^2 \quad \text{Parseval'sche Gleichung.}^{17}$$

¹⁶Friedrich Wilhelm Bessel (*1784 Minden, †1846 Königsberg), deutscher Naturwissenschaftler.

¹⁷Marc-Antoine Parseval des Chênes (*1755 Rosières-aux-Salines, †1836 Paris), französischer Mathematiker.

Aus der Parseval-Gleichung folgt die **Bedingung** für die **Vollständigkeit** des Orthogonalsystems, nach dem wir $f(\vec{r})$ entwickelt haben:

$$\sum_{i=1}^N |a_i|^2 = \int d^3r \int d^3r' \sum_{i=1}^N [u_i^*(\vec{r})u_i(\vec{r}')] f(\vec{r})f^*(\vec{r}')$$

$$\int d^3r f^*(\vec{r})f(\vec{r}) = \int d^3r \int d^3r' \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') f(\vec{r})f^*(\vec{r}') \quad (*)$$

d. h., die Parseval-Gleichung (\equiv Gleichheit der linken Seiten) ist äquivalent zu

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} [u_i^*(\vec{r})u_i(\vec{r}')] = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')} \quad \text{Vollständigkeitsrelation.}$$

Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$

Die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ mit $-l \leq m \leq l$ bilden ein orthonormales Funktionensystem auf der Einheitskugel: eine (zweidimensionale) Basis, nach der sich andere zweidimensionale Funktionen (z. B. der Winkelanteil der Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi(r, \vartheta, \varphi) = 0$) entwickeln lassen. Für jedes l ($l = 0, 1, 2, \dots$) gibt es $(2l + 1)$ Kugelflächenfunktionen.

Sie sind **orthonormiert**

$$\boxed{(Y_{l'm'}, Y_{lm}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi) Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}}$$

und erfüllen die Vollständigkeitsrelation (*) in der Form

$$\boxed{\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) Y_{lm}(\vartheta', \varphi') = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta')} .$$

Weitere Eigenschaften der $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$:

$$Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{l,-m}(\vartheta, \varphi)$$

z. B.:

$$Y_{11}^* = \left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{i\varphi} \right)^* = -Y_{1-1}(\vartheta, \varphi).$$

(Die Y_{l0} sind reell.)

Die einfachsten Kugelflächenfunktionen sind

$$\begin{aligned}
 Y_{00}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, & Y_{10}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta, \\
 Y_{1\pm 1}(\vartheta, \varphi) &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}, & Y_{20}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right), \\
 Y_{2\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \vartheta \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}, & Y_{2\pm 2}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \vartheta e^{\pm 2i\varphi}.
 \end{aligned}$$

Die Y_{lm} sind Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$\boxed{\Delta_{\Omega} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = -l(l+1)Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}.$$

Mit dem Winkelanteil des Laplace-Operators, Δ_{Ω} :

$$\Delta_{\Omega} \equiv \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

z. B. gilt für $Y_{11}(\vartheta, \varphi) \propto \sin(\vartheta)e^{i\varphi}$:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\Omega}(\sin(\vartheta)e^{i\varphi}) &= \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin(\vartheta)e^{i\varphi}) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} e^{i\varphi} \\
 &= \left[\frac{1}{\sin \vartheta} (-\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) - \frac{1}{\sin \vartheta} \right] e^{i\varphi} \stackrel{!}{=} -2 \sin(\vartheta)e^{i\varphi},
 \end{aligned}$$

und wegen $-\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta - 1 = -2 \sin^2 \vartheta$ ist die Differentialgleichung erfüllt.

Da die Y_{lm} ein **vollständiges Orthonormalsystem** auf der Kugeloberfläche bilden, lässt sich jede auf der Kugel differenzierbare Funktion mit beschränkten Ableitungen entwickeln:

$$\boxed{f(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)},$$

mit Koeffizienten

$$a_{lm} = (f, Y_{lm}) = \int d\Omega f(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega).$$

Für die über m summierten Kugelflächenfunktionen gilt das folgende Additionstheorem:

$$\boxed{\frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = P_l(\cos \theta)}$$

mit $\theta = \angle(\vec{r}, \vec{r}')$ und $\cos \theta = \sin \vartheta' \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi') + \cos \vartheta' \cos \vartheta$. Die Richtung von \vec{r} ist durch (ϑ, φ) , die von \vec{r}' durch (ϑ', φ') bestimmt. (Für $\vartheta' = 0$ wird $\theta \equiv \vartheta$).

Die Funktionen P_l auf der rechten Seite des Additionstheorems sind die **Legendre-Polynome**

$$P_l(\cos \vartheta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{l0}(\vartheta, \varphi) \quad (\text{die } Y_{l0} \text{ haben keine } \varphi\text{-Abhängigkeit}).$$

Mit dem Ausdrücken für die Y_{l0} ergibt sich

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \text{ etc. (Beachte die Normierung: } P_l(1) = 1).$$

Auch die Legendre-Polynome (Abb. 2.2) bilden auf dem Intervall $[-1, 1]$ ein **vollständiges Orthogonalsystem**

$$\int_{-1}^{+1} dx P_l(x) P_n(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ln},$$

und jede Funktion $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich nach Legendre-Polynomen entwickeln:

$$\boxed{f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x)}, \quad c_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 dx f(x) P_l(x).$$

Beispielsweise lässt sich der Ausdruck $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$ mit $|\vec{r}'| < |\vec{r}|$ und $\vartheta = \angle(\vec{r}, \vec{r}')$ – siehe die **Multipolentwicklung** in Abschn. 2.4.2 – entwickeln als

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta}} = \frac{1}{r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r} \cos \vartheta}} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \vartheta).$$

Die $P_l(x)$ sind Lösungen der **Legendre'schen Differenzialgleichung**

$$\boxed{(1-x^2)f'' - 2xf' + l(l+1)f = 0}, \quad l \in \mathbb{N}_0.$$

(Die allgemeine Lösung ist $f(x) = AP_l(x) + BQ_l(x)$, mit $Q_l \equiv$ Legendre-Funktionen zweiter Art \Rightarrow die P_l sind partikuläre Lösungen). Es gibt mehrere Darstellungsformen für die P_l , z. B. die **Rodrigues¹⁸-Formel**

$$\boxed{P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} [(x^2 - 1)^l]},$$

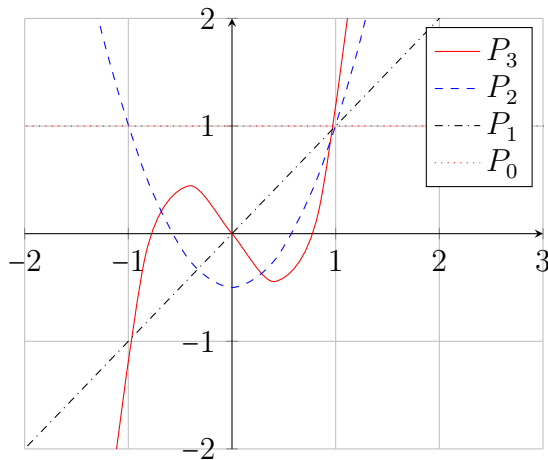
die Integraldarstellung

$$P_l(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi \right]^l d\varphi, \quad x \in \mathbb{C} \setminus \{+1, -1\},$$

¹⁸Benjamin Olinde Rodrigues (*1795 Bordeaux, †1851 Paris), französischer Mathematiker, Bankier und Sozialreformer.

oder Rekursionsformeln.

Die Legendre-Polynome als orthogonales Funktionensystem spielen vor allem in der Elektrodynamik und in der Quantenmechanik eine wichtige Rolle.



$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \end{aligned}$$

Abb. 2.2 Legendre-Polynome

Die **assoziierten (zugeordneten) Legendre-Polynome** $P_{lm}(x)$ definiert man mittels der m -ten Ableitung der $P_l(x)$ als

$$P_{lm}(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad m > 0$$

$$P_{l-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}(x)$$

bzw. durch den in Abschn. 2.4.2 gezeigten allgemeinen Ausdruck. Der Zusammenhang mit den Kugelflächenfunktionen ist demnach

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos \vartheta) e^{im\varphi}.$$

Wie bereits bei den Y_{lm} diskutiert, lässt sich aufgrund der Vollständigkeit der Kugelflächenfunktionen jede Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ auf der Einheitssphäre durch Kugelflächenfunktionen darstellen.

Tensoren

Ein **Tensor n -ter Stufe** ist eine Größe mit n Indizes, die durch ihr Transformationsverhalten definiert ist.

Vektoren sind **Tensoren** erster Stufe mit

$$x'_i = \sum_{i'} D_{ii'} x_{i'}.$$

Die $D_{ii'}$ sind die Elemente einer **Drehmatrix** \mathbb{D} : Bei einer Drehung des Koordinatensystems – z. B. um die x -Achse – transformieren sich ihre Komponenten gemäß

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Tensoren zweiter Stufe transformieren unter Drehungen in der Form

$$A'_{ik} = \sum_{i'k'} D_{ii'} D_{kk'} A_{i'k'}.$$

Drehungen wirken auf jede indizierte Größe als orthogonale Matrizen, denn es gilt $\mathbb{D}^{-1}(\alpha) = \mathbb{D}(-\alpha) = \mathbb{D}^T(\alpha)$ und somit $\mathbb{D}^T \mathbb{D} = \mathbb{D} \mathbb{D}^T = \mathbb{1}$. Im folgenden Abschnitt werden wir das Quadrupolmoment als Beispiel für einen Tensor zweiter Stufe kennenlernen.

Drehinvariante Tensoren

- **zweiter Stufe:** Kronecker-Delta $\delta_{ik} = \delta'_{ik}$, denn

$$\delta'_{ik} = \sum_{i'k'} D_{ii'} D_{kk'} \delta_{i'k'} = \sum_{i'} D_{ii'} D_{ki'} = \sum_{i'} D_{ii'} D_{i'k}^T = \delta_{ik} \quad \text{wg. Orthogonalität von } \mathbb{D}.$$

- **dritter Stufe:** Levi-Civita-Tensor $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon'_{ijk}$. (Das Vektorprodukt $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$ ist unter Drehungen invariant; also ist auch ε_{ijk} invariant.)

2.5 Multipolentwicklung

2.5.1 Monopol, Dipol, Quadrupol

Für das Potenzial $\Phi(\vec{r})$ einer Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ hatten wir den (exakten) Ausdruck gefunden

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3 r' \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Jetzt bestimmen wir für große Abstände die führenden Beiträge der Ladungsverteilung zum Potenzial anhand einer Taylor-Entwicklung von $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ nach \vec{r}' . Die Ladungsdichte

$\rho(\vec{r}')$ soll bei $\vec{r}' \approx 0$ zentriert sein, und $|\vec{r} - \vec{r}'| \gg |\vec{r}'|$, d. h., der Beobachter (bei \vec{r}) ist entfernt von der Ladungsverteilung (Abb. 2.3),

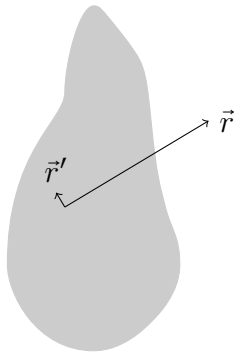


Abb. 2.3 Ladungsverteilung mit Beobachter bei \vec{r}

Die ersten drei Glieder der Taylorentwicklung nach $\vec{r}' \equiv (x', y', z')$ sind

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \underbrace{\frac{1}{r}}_{\text{Monopol}} - \underbrace{(\vec{r}' \vec{\nabla}) \cdot \frac{1}{r}}_{\text{Dipol, } \vec{r}' \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\vec{r}' \vec{\nabla}) (\vec{r}' \vec{\nabla}) \frac{1}{r}}_{\text{Quadrupol}} \mp \dots$$

Die vollständige Entwicklung wird mit dem Operator \otimes , der auf $1/r$ wirkt

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-\vec{r}' \vec{\nabla})^l}{l!}}_{\otimes} \frac{1}{r} \equiv \underbrace{e^{-\vec{r}' \vec{\nabla}}}_{\otimes} \left[\frac{1}{r} \right].$$

Wir berechnen die ersten Terme der Entwicklung: Mit $\vec{\nabla}_r \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ [wegen $\vec{\nabla} f(r) = \frac{\vec{r}}{r} f'(r)$] wird $(\vec{r}' \vec{\nabla}) \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}' \vec{r}}{r^3}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\vec{r}' \vec{\nabla}) (\vec{r}' \vec{\nabla}) \frac{1}{r} &= \frac{1}{2} (\vec{r}' \vec{\nabla}) \left(\frac{-\vec{r}' \vec{r}}{r^3} \right) \stackrel{\text{Produktregel}}{=} -\frac{1}{2} \left[(\vec{r}' \vec{\nabla} \frac{1}{r^3}) (\vec{r}' \vec{r}) + \frac{\vec{r}' \vec{\nabla} (\vec{r}' \vec{r})}{r^3} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[(-3\vec{r}' \frac{\vec{r}}{r^5}) (\vec{r}' \vec{r}) + \frac{\vec{r}'}{r^3} (\vec{\nabla} \otimes \vec{r}) \vec{r}' \right], \end{aligned}$$

mit der Matrixdarstellung $[\vec{r} = (x, y, z)]$:

$$\vec{\nabla} \otimes \vec{r} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial y}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \quad [\text{beachte: } \vec{\nabla}_r (\vec{r} \vec{r}') = \vec{r}', \quad (\vec{\nabla}_r \vec{r}) \vec{r}' = 3\vec{r}']$$

so dass:

$$\boxed{\frac{1}{2} (\vec{r}' \vec{\nabla}) (\vec{r}' \vec{\nabla}) \frac{1}{r} = \frac{3}{2} \frac{(\vec{r}' \vec{r}')^2}{r^5} - \frac{1}{2} \frac{\vec{r}'^2}{r^3}}.$$

Die Terme sind also nach steigenden Potenzen von r im Nenner geordnet: Bei großen Abständen r dominiert der **Monopol** mit kleinen Dipol- und Quadrupolkorrekturen. Bei kleineren Abständen werden jedoch auch **Dipol** und **Quadrupol** wichtig:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^3} + \frac{3(\vec{r}\vec{r}')^2 - r^2r'^2}{2r^5} + \dots$$

Der Zähler des letzten Terms lässt sich schreiben als

$$3(\vec{r}\vec{r}'^2)^2 - \vec{r}^2\vec{r}'^2 = x'_i x'_k (3x_i x_k - r^2 \delta_{ik}) = (x'_i x'_k - \frac{1}{3} r'^2 \delta_{ik}) (3x_i x_k - r^2 \delta_{ik})$$

zusätzlicher Term, der bei der Kontraktion mit $(3x_i x_k - r^2 \delta_{ik})$ verschwindet:
 $\delta_{ik} (3x_i x_k - \delta_{ik} r^2) = 3x_i x_i - r^2 \delta_{ii} = 0.$

Dabei wird über alle Indizes summiert, die zweimal in einem Produkt auftauchen (Summenkonvention) hier also über $i, k = 1, 2, 3$. Der zusätzliche Term sorgt für die **Spurfreiheit** des Quadrupolmoments.

Die Multipolentwicklung des **Potenzials** $\Phi(\vec{r})$ wird mit

$$q = \int d^3 r' \varrho(\vec{r}') \quad \text{Ladung}$$

$$\vec{p} := \int d^3 r' \vec{r}' \varrho(\vec{r}') \quad \text{Dipolmoment der Ladungsverteilung } \varrho(\vec{r})$$

$$Q_{ik} := \int d^3 r' (x'_i x'_k - \frac{1}{3} \delta_{ik} r'^2) \varrho(\vec{r}') \quad \text{Komponenten des Quadrupolmoments } \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} + Q_{ik} \frac{3x_i x_k - r^2 \delta_{ik}}{2r^5} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

(der Term $-r^2 \delta_{ik}$ verschwindet bei Kontraktion mit Q_{ik}).

Der **Monopol** fällt mit $1/r$ ab, der **Dipol** mit $1/r^2$, der **Quadrupol** mit $1/r^3$ etc.

Die **Feldstärke** folgt als Gradient des Potenzials:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{r}) = \frac{q\vec{r}}{r^3} + \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{r^5} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right),$$

d. h., fällt ein Term im Potenzial mit $1/r^n$ ab, dann fällt er im Feld mit $1/r^{n+1}$ ab: **Dipol** im Potenzial mit $1/r$, im Feld mit $1/r^2$, usw. Die einfachste **Darstellung** eines Dipols sind zwei Punktladungen $\pm q$ im Abstand $d = |\vec{d}|$ mit dem **Dipolmoment** $\vec{p} = q \cdot \vec{d}$.

Quadrupol

Einfachste Darstellung: Vier Punktladungen, je zwei positive/negative Ladungen gegenüberliegend mit gleichem Betrag (Abb. 2.4). Sowohl die **Gesamtladung** als auch das **Dipolmoment** verschwinden beim reinen Quadrupol.

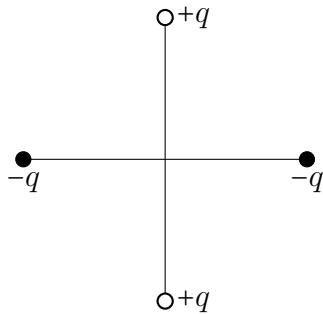


Abb. 2.4 Quadrupol

Das **Quadrupolmoment** ist ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe,

$$Q_{ik} = Q_{ki}$$

und kann deshalb wie beispielsweise auch der Trägheitstensor in der klassischen Mechanik durch eine orthogonale Transformation auf Diagonalform gebracht werden.

Aus der Definition von Q_{ik} in Abschn. 2.4.1 folgt (mit $\delta_{ii} \equiv \sum_i \delta_{ii} = 3$) $Q_{ii} = 0$, so dass

$$\boxed{\text{Sp}(\mathbb{Q}) = \sum_i Q_{ii} = 0}, \quad \text{die Spur des Quadrupolmoments verschwindet.}$$

Symmetrischer Quadrupol

Hier hängt die Ladungsverteilung nur von z und $\sqrt{x^2 + y^2}$ ab, $\varrho = \varrho(z, \sqrt{x^2 + y^2})$ (Abb. 2.5).

Dann gilt:

- $Q_{xy} = Q_{xz} = Q_{yz} = 0$, wegen $\varrho(x, y, z) = \varrho(-x, y, z) = \varrho(x, -y, z)$, und
- $Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2}Q_{zz}$, wegen $\text{Sp}(\mathbb{Q}) = 0$.

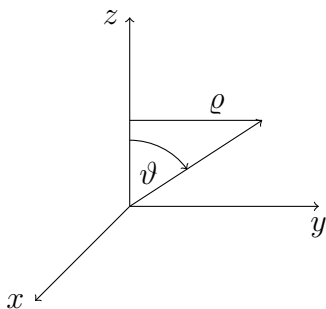


Abb. 2.5 Symmetrischer Quadrupol

Man definiert hier das effektive Quadrupolmoment als

$$\hat{Q} := \frac{3}{2} Q_{zz} = \int d^3 r' \left(\frac{3}{2} z'^2 - \frac{1}{2} r'^2 \right) \varrho(\vec{r}') \stackrel{z' = r' \cos \vartheta'}{=} \int d^3 r' r'^2 \underbrace{\left[\frac{3}{2} (\cos \vartheta')^2 - \frac{1}{2} \right]}_{P_{20}(\cos \vartheta')} \varrho(\vec{r}')$$

$P_{20}(\cos \vartheta')$
 zugeordnetes (assoziertes)
 Legendre-Polynom

$$\Rightarrow \hat{Q} = \int d^3 r' r'^2 P_2(\cos \vartheta') \varrho(\vec{r}')$$

(manchmal $\tilde{Q} := \frac{1}{2} Q_{zz}$ bei Definition von Q_{ik} mit zusätzlichem Faktor 3).

Multipol im äußeren Feld

Eine um den Ursprung lokalisierte Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ sei in einem äußeren Feld, das durch ein Potenzial $\Phi_a(\vec{r})$ beschrieben und von einer entfernten Ladungsverteilung $\varrho_a(\vec{r})$ erzeugt wird. Ferner bezeichne $\Phi(\vec{r})$ das Potenzial, das allein durch $\varrho(\vec{r})$ erzeugt wird.

Die **Wechselwirkungsenergie** ist

$$U_w = \int d^3 r \varrho(\vec{r}) \Phi_a(\vec{r}),$$

da beide Energiebeiträge – der zweite ist $\int d^3 r \varrho_a(\vec{r}) \Phi(\vec{r})$ – wegen der Symmetrie des Problems gleich groß sind; es gibt deshalb hier keinen Faktor 1/2.

Die Entwicklung des äußeren Potentials ergibt

$$\begin{aligned} U_w &= \int d^3 r \varrho(\vec{r}) \left[\Phi_a(0) + \vec{r} \vec{\nabla} \Phi_a(\vec{r})|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2} x_i x_j \nabla_i \nabla_j \Phi_a|_{\vec{r}=0} + \dots \right] \\ &= q \Phi_a(0) + \vec{p} \vec{\nabla} \Phi_a|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2} \left[Q_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \int d^3 r \varrho(\vec{r}) r^2 \right] \nabla_i \nabla_j \Phi_a|_{\vec{r}=0} + \dots \end{aligned}$$

mit $\nabla_i \nabla_i \Phi_a = \Delta \Phi_a = -4\pi \varrho_a = 0$ (da am Ursprung keine Ladungen sind, die ϱ_a erzeugen).

\Rightarrow **Wechselwirkungsenergie:**

$$U_w = q \Phi_a(0) - \vec{p} \vec{E}_a(0) + \frac{1}{2} Q_{ij} \nabla_i \nabla_j \Phi_a|_{\vec{r}=0} + \dots$$

Aus diesem allgemeinen Ausdruck lässt sich u. a. die potenzielle Energie zweier **wechselwirkender Dipole** – z. B. \vec{p} im Ursprung und \vec{p}_a bei \vec{r}_0 – ableiten (Abb. 2.6):

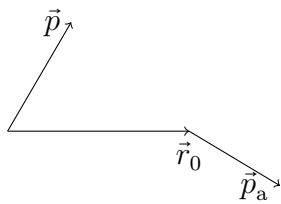


Abb. 2.6 Wechselwirkende Dipole

Der Dipol \vec{p}_a erzeugt ein Potenzial

$$\Phi_a(\vec{r}) = \frac{\vec{p}_a(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3},$$

und der allgemeine Ausdruck für die Wechselwirkungsenergie U_w vereinfacht sich zu

$$U_w = -\vec{p}\vec{E}_a(0) = \vec{p}\vec{\nabla}\Phi_a|_{\vec{r}=0} = \frac{\vec{p}\vec{p}_a}{r_0^3} - \frac{3(\vec{p}_a\vec{r}_0)(\vec{p}\vec{r}_0)}{r_0^5}.$$

Die Energie hängt demnach von der **Orientierung** relativ zum Feld am Ort des Dipols ab: Analog richten sich in der Magnetostatik die Magnetnadeln im Erdfeld aus und minimieren so die magnetische Wechselwirkungsenergie.

Die **Kraft** auf den Dipol im Ursprung ist

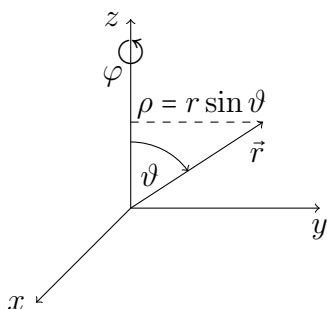
$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int d^3r \rho(\vec{r}) \vec{E}_a(\vec{r}) = \int d^3r \rho(\vec{r}) [\vec{E}_a(0) + \vec{r}\vec{\nabla}\vec{E}_a|_{\vec{r}=0} + \dots] \\ \Rightarrow \vec{F} &= (\vec{p}\vec{\nabla})\vec{E}_a(0) + \dots\end{aligned}$$

und das **Drehmoment**

$$\vec{M} = \int d^3r \rho(\vec{r}) \vec{r} \times \vec{E}_a(\vec{r}) = \vec{p} \times \vec{E}_a(0) + \dots$$

2.5.2 Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten

Es soll die Laplace-Gleichung $\Delta\Phi(\vec{r}) = 0$ außerhalb einer begrenzten Ladungsverteilung in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) gelöst werden (Abb. 2.7).



$$\begin{aligned}x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta\end{aligned}$$

Abb. 2.7 Kugelkoordinaten

Es ist

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega \Phi$$

$$\Delta_\Omega \Phi = \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

($\Delta_\Omega \equiv$ Winkelanteil des Laplace-Operators auf der Kugel, entfällt bei radialsymmetrischen Problemen).

Mit $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\vec{r}'} = r\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\vartheta}$ ($\vartheta \equiv \vartheta$ für $\vartheta' = 0$) wird die Multipolentwicklung

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \int d^3r' \frac{\varrho(\vec{r}')}{\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\vartheta}}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int d^3r' r'^l P_l(\cos\vartheta) \varrho(\vec{r}') .$$

Die Legendre-Polynome P_l haben wir im mathematischer Einschub (Abschn. 2.4) ausführlich behandelt. Mit dem dort diskutierten Additionstheorem

$$\frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = P_l(\cos\theta)$$

erhalten wir die Entwicklung des Potentials

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{r^{l+1}}$$

nach den **sphärischen Multipolmomente** q_{lm}

$$q_{lm} \equiv \int d^3r' Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') r'^l \varrho(\vec{r}') .$$

Offensichtlich gilt $q_{00} = q$; der Zusammenhang zwischen den q_{1m} und dem kartesischen Dipolmoment \vec{p} ist

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z$$

$$q_{1\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x \mp ip_y) .$$

2.5.3 Lösung der Laplace-Gleichung

In Kugelkoordinaten lautet die Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi(r, \vartheta, \varphi) = 0.$$

Lösung durch **Separationsansatz**:

$$\begin{aligned}\Phi(r, \vartheta, \varphi) &= R(r)Y(\vartheta, \varphi) \\ \Rightarrow \Delta\Phi(r, \vartheta, \varphi) &= (\Delta_r + 1/r^2\Delta_\Omega)R(r)Y(\vartheta, \varphi) \\ &= (\Delta_r R(r))Y(\vartheta, \varphi) + R(r)/r^2\Delta_\Omega Y(\vartheta, \varphi) = 0\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\Delta_r R(r) &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r}(rR) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [R + rR'] = \frac{1}{r} [R' + R' + rR''] = \frac{2}{r} R' + R'' \\ \Rightarrow \Delta\Phi &= R''Y + \frac{2}{r} R'Y + \frac{1}{r^2} R\Delta_\Omega Y = 0.\end{aligned}$$

Multiplikation mit $r^2/(RY)$ ergibt

$$\underbrace{r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R}} = \underbrace{-\frac{1}{Y} \Delta_\Omega Y} \equiv c$$

hängt nur von r ab hängt nur von $\Omega=(\vartheta, \varphi)$ ab

\Rightarrow beide Terme müssen konstant sein, und sich zu Null addieren.

Lösung des Winkelanteils

$Y(\vartheta, \varphi) \equiv f(\vartheta) \cdot g(\varphi)$; multipliziere mit $\sin^2 \vartheta$

$$\Rightarrow c \cdot \sin^2 \vartheta + \frac{\sin^2 \vartheta}{Y} \Delta_\Omega f(\vartheta)g(\varphi) = 0$$

$$\underbrace{c \cdot \sin^2 \vartheta + \frac{\sin^2 \vartheta}{f(\vartheta)} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right]}_{= \text{const} \equiv m^2} + \underbrace{\frac{g''(\varphi)}{g(\varphi)}}_{= \text{const} = -m^2} = 0$$

$$\Rightarrow g''(\varphi) + m^2 g(\varphi) = 0$$

$$g(\varphi) = g_0 e^{\pm im\varphi}.$$

Wegen der geforderten Eindeutigkeit der Lösung müssen die m ganze Zahlen sein, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, da nur so $g(\varphi + 2\pi) = g(\varphi)$ gilt.

ϑ -Anteil: Die Substitution $x = \cos \vartheta$, $f(\vartheta) = F(x)$, $\frac{d}{d\vartheta} = -\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial x}$ ergibt

$$\boxed{\frac{d}{dx} [(1-x^2)F'] + \left(c - \frac{m^2}{1-x^2}\right)F = 0}.$$

Die Differenzialgleichung hat nur dann für $x = \pm 1$ reguläre Lösungen, falls $c = l(l+1)$ mit $l = 0, 1, 2, \dots$ **und** $|m| \leq l$. Reguläre Lösungen sind die **zugeordneten Legendre-Polynome** $P_{lm}(x)$.

Lösung der Radialgleichung:

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} = l(l+1);$$

$$\text{mit } R(r) \equiv \frac{U(r)}{r} \Rightarrow r^2 U'' = l(l+1)U;$$

$$\text{Ansatz: } U(r) = r^a \Rightarrow a(a-1)r^a = l(l+1)r^a \Rightarrow a = l+1 \vee a = -l$$

\Rightarrow Lösung für $R(r) = U(r)/r$:

$$\boxed{R(r) = C_1 r^l + C_2 r^{-l-1}}$$

(C_1 -Term regulär für $r \rightarrow 0$, singular für $r \rightarrow \infty$. C_2 singular für $r \rightarrow 0$, regulär für $r \rightarrow \infty$.)

Die Gesamtlösung wird

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} [A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1}] e^{im\varphi} P_l(\cos \vartheta) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} [\tilde{A}_{lm} r^l + \tilde{B}_{lm} r^{-l-1}] Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \end{aligned}$$

2.5.4 Lösung der Poisson-Gleichung

$$\boxed{\Delta \Phi(r, \vartheta, \varphi) = -4\pi \varrho(r, \vartheta, \varphi)}$$

Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen:

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{lm} R_{lm}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

$$\varrho(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{lm} \varrho_{lm}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Einsetzen in die Poisson-Gleichung ergibt nach Multiplikation mit r^2 die inhomogene Differenzialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 R'_{lm}(r)) - l(l+1)R_{lm}(r) = -4\pi r^2 \varrho_{lm}(r)$$

Wir lösen sie zuerst für den Spezialfall einer geladenen Kugelschale mit Radius r' , $\hat{\rho}_{lm}(r, r') = \delta(r - r')$:

$$\boxed{2r\hat{R}'_{lm}(r, r') + r^2\hat{R}''_{lm}(r, r') - l(l+1)\hat{R}_{lm}(r, r') = -4\pi\delta(r - r')} \quad (*)$$

Für $r < r'$ sollen die Lösungen regulär im Ursprung sein: $\hat{R}_{lm}(r, r')|_{r < r'} = C_1 r^l$.

Für $r > r'$ sollen die Lösungen regulär für $r \rightarrow \infty$ sein: $\hat{R}_{lm}(r, r')|_{r > r'} = C_2 r^{-l-1}$.

Es gilt:

(a) Ist $\Phi(r)$ stetig bei $r = r'$, dann ist auch $R(r)$ stetig mit

$$C_1 (r')^l = \hat{R}_{lm}(r', r') = C_2 (r')^{-l-1} \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = (r')^{-2l-1}$$

(b) $\hat{R}_{lm}(r, r')$ darf einen Knick haben, d. h., die Thetafunktion (Heaviside-Funktion) enthalten:

$$\theta(r - r') = \begin{cases} 0, & r - r' < 0 \\ 1, & r - r' > 0 \end{cases}$$

$$\text{mit } \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} dr' f(r') \theta(r - r') = f(r) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial r} \theta(r - r') = \delta(r - r')}.$$

Daraus konstruieren wir für die Radialgleichung den folgenden **Lösungsansatz**:

$$\hat{R}_{lm}(r, r') = C_2 \left[\underbrace{r^{-l-1} \theta(r - r')}_{r > r'} + \frac{r^l}{(r')^{2l+1}} \underbrace{\theta(r' - r)}_{r < r'} \right].$$

C_2 wird durch Einsetzen des Ansatzes in (*) und partielle Integration bestimmt (δ' -Terme fallen gegen $\frac{d}{dr}$ Terme weg). In Termen mit δ -Funktionen beachte $\delta(r - r') = \delta(r' - r)$ und $f(r)\delta(r - r') = f(r')\delta(r - r')$.

$$\Rightarrow C_2(2l+1)(r')^{-l} = 4\pi \Rightarrow C_2 = \frac{4\pi}{2l+1}(r')^l$$

$$\Rightarrow R_{lm}(r, r') = \frac{4\pi}{2l+1} \left[\frac{(r')^l}{r^{l+1}} \theta(r - r') + \frac{r^l}{(r')^{l+1}} \theta(r' - r) \right]$$

Eine allgemeine Ladungsverteilung $\rho_{lm}(r)$ kann nun als eine Superposition von geladenen Kugelschalen $\hat{\rho}_{lm}(r, r')$ für alle Radien r' mit Koeffizienten $r'^2 \rho_{lm}(r')$ angesehen werden, denn

$$\rho_{lm}(r) = \int_0^\infty dr' \rho_{lm}(r') \underbrace{\delta(r - r')}_{= r^2 \hat{\rho}_{lm}(r, r') = (r')^2 \hat{\rho}_{lm}(r, r')} = \int_0^\infty dr' (r')^2 \rho_{lm}(r') \hat{\rho}_{lm}(r, r') .$$

Aufgrund der Linearität der Maxwellgleichungen lässt sich die allgemeine Lösung $R_{lm}(r)$ für eine beliebige Ladungsverteilung $\rho_{lm}(r)$ dann ebenfalls als Superposition der $\hat{R}_{lm}(r, r')$ mit den gleichen Koeffizienten $(r')^2 \rho_{lm}(r')$ schreiben,

$$R_{lm}(r) = \int_0^\infty dr' (r')^2 \rho_{lm}(r') \hat{R}_{lm}(r, r') ,$$

so dass

$$\boxed{\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l,m} R_{lm}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}$$

$$= \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left[\int_0^r dr' \frac{(r')^{l+2}}{r^{l+1}} \rho_{lm}(r') + \int_r^\infty dr' \frac{r^l}{(r')^{l-1}} \rho_{lm}(r') \right] Y_{lm}(\vartheta, \varphi) .$$

2.6 Dielektrika

Materie besteht aus positiv und negativ geladenen Teilchen – Protonen, Elektronen – sowie den (neutralen) Neutronen. Die mikroskopischen Ladungen gleichen sich in der Regel im makroskopischen Bereich aus, so dass die Materie nach außen hin fast oder völlig neutral ist.

Die **Ladungen** bewegen sich dabei mit **hoher Frequenz** um ihre Ruhelagen, sofern die Temperatur nicht in der Nähe des absoluten Nullpunktes ist.

In **Leitern** bewegen sich Ladungen frei. In der **Elektrostatik** gilt in einem Leiter $\vec{E} = 0$, da sich die Ladungen sonst wegen $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ bewegen würden ($\sigma \equiv$ Leitfähigkeit).

Dielektrika sind schwach- oder nichtleitende, nichtmetallische Substanzen, deren Ladungsträger i. Allg. nicht frei beweglich sind; dies können Gase, Flüssigkeiten oder Festkörper sein. Sie sind normalerweise unmagnetisch.

In **Isolatoren** können Ladungen nicht wandern, aber verschoben werden (Abb. 2.8): Ein äußeres \vec{E} -Feld erzeugt **Dipole** durch Verschiebung der Ladungsschwerpunkte von Kernen und Elektronenhüllen (**Verschiebungspolarisation**).

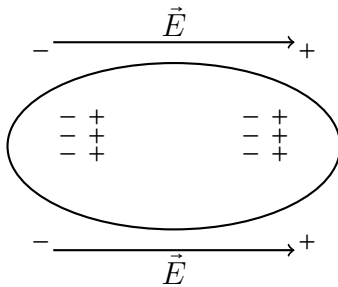


Abb. 2.8 Isolator im elektrischen Feld

Die **Gesamtladung** verschwindet weiterhin, aber im Volumen V wird eine **Dipoldichte** erzeugt, die bestimmt ist durch $\frac{1}{V} \times \text{Anzahl der Dipole} \times \text{mittleres Dipolmoment}$.

Bereits existierende Dipole von Molekülen oder Molekülgruppen richten sich im \vec{E} -Feld aus (**Orientierungspolarisation**); sie arbeiten dabei gegen die thermische Bewegung.

Im Folgenden wollen wir die Verschiebungspolarisation näher betrachten: Das \vec{E} -Feld bewirkt die Verschiebung von Ladungen q_i von \vec{r}_i nach $\vec{r}_i + \vec{a}_i$:

Dipole $\vec{p}_i = q_i \vec{a}_i$ werden induziert, die Materie wird **polarisiert** mit **induziertem Dipolmoment** $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$. Die zugehörige **Ladungsverteilung** wird

$$\varrho_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \Delta \Phi = \frac{1}{4\pi} \Delta \sum_i \vec{p}_i \underbrace{\frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}}_{= \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}} = \frac{1}{4\pi} \nabla \sum_i \vec{p}_i \underbrace{\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}}_{= -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)} = -\vec{\nabla} \sum_i \vec{p}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i).$$

und mit der Dipolmomentdichte (**Polarisation**)

$$\vec{P}(\vec{r}) \equiv \frac{\partial \vec{p}}{\partial V} = \sum_i \vec{p}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

ergibt sich

$$\varrho_p(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \vec{P}(\vec{r}).$$

Die **Ladungsdichte** hat also außer dem Anteil frei beweglicher Ladungen $\varrho_f(\vec{r})$ auch eine **Polarisationsladungsdichte** $\varrho_p(\vec{r})$

$$\varrho(\vec{r}) = \varrho_f(\vec{r}) + \varrho_p(\vec{r}) = \varrho_f(\vec{r}) - \vec{\nabla} \vec{P}(\vec{r}).$$

Die Polarisation \vec{P} beschreibt die **Antwort des Mediums** auf ein anregendes elektrisches Feld \vec{E} . Im Medium wird dadurch die Feldstärke \vec{E} zur dielektrischen Verschiebung \vec{D} ,

$$\boxed{\vec{D}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) + 4\pi\vec{P}(\vec{r})}.$$

Für die dielektrische Verschiebung \vec{D} gilt $\vec{\nabla}\vec{D} = 4\pi\varrho_f$

$$\Rightarrow \int_V dV \vec{\nabla}\vec{D} = \oint_A d\vec{A} \vec{D} = 4\pi \int_V dV \varrho_f = 4\pi q_f$$

und analog für das elektrische Feld \vec{E}

$$\int_V dV \vec{\nabla}\vec{E} = \oint_A d\vec{A} \vec{E} = 4\pi(q_f + q_p), \quad \text{mit } q_p = \text{Polarisationsladung}$$

mit der Polarisations-Ladungsdichte $\varrho_p = -\vec{\nabla}\vec{P}$

$$\Rightarrow 4\pi\varrho_f = \vec{\nabla}\vec{D} = \vec{\nabla}[\vec{E} + 4\pi\vec{P}] = \vec{\nabla}\vec{E} - 4\pi\varrho_p$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi(\varrho_f + \varrho_p)},$$

sowohl die freien, als auch die durch Polarisation erzeugten/induzierten Ladungen tragen als Quellen zu \vec{E} bei.

In der Maxwell-Gleichung $\vec{\nabla}\vec{D}(\vec{r}) = 4\pi\varrho_f(\vec{r})$ (die Quellen von \vec{D} sind die freien Ladungen ϱ_f) sind dabei \vec{D} und ϱ_f als (über makroskopische Volumina) gemittelte Größen aufzufassen.

Wegen des vorausgesetzten **linearen Zusammenhanges** (s. Kap. 1) zwischen \vec{D} und \vec{E} , $\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon\vec{E}(\vec{r})$ folgt $\vec{E} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon\vec{E}$, ($\varepsilon =$ relative Dielektrizitätskonstante; im Vakuum ist $\varepsilon = 1$, $\vec{E} = \vec{D}$)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\vec{E} \equiv \chi_e\vec{E}},$$

d. h. ein linearer Zusammenhang zwischen \vec{P} und \vec{E} über die **dielektrische Suszeptibilität**

$$\boxed{\chi_e = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}}, \quad \boxed{\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e}.$$

Aus $\int_V d^3r \vec{\nabla}\vec{D} = 4\pi \int_V d^3r \varrho_f = 4\pi q_f$ folgt mit dem Satz von Gauß für $A = \partial V$

$$\boxed{\int_A d\vec{A} \vec{D}(\vec{r}) = 4\pi q_f}.$$

Der Fluss der dielektrischen Verschiebung durch die Oberfläche A eines Volumens V ist demnach gleich der frei beweglichen Ladung $\times 4\pi$ in dem betrachteten Volumen.

Bemerkungen zu $\vec{P}, \chi_e, \varepsilon$:

- Nur für **isotrope** Materialien sind ε und χ_e Skalare; für **anisotrope** Materialien sind es **Tensoren**.
- Bei **Ferroelektrika** ist die **Polarisation** \vec{P} bereits bei $\vec{E} = 0$ von Null verschieden, wird aber meist durch **Oberflächenladungen** kompensiert. Äußere Veränderungen (wie **Druck** bei der Piezoelektrizität von Quarz) können sie in Erscheinung treten lassen.
- Die **Dimensionen** von \vec{P}, \vec{D} und \vec{E} sind im **Gauß-System** gleich, die Einheiten sind $\sqrt{\text{dyn}} \text{ cm}$. Im SI-System ist $[E] = \frac{\text{V}}{\text{m}}$; $[D] = [P] = \frac{\text{As}}{\text{m}^2}$. Die χ_e unterscheiden sich in den beiden Maßsystemen um einen Faktor 4π , $(\chi_e)_{\text{SI}} = \epsilon - 1 = 4\pi(\chi_e)_{\text{G}}$, die ε sind identisch.
- **Werte für ε : Luft: 1,000264; Teflon: 2,0; Glas: 3,7 – 10; Alkohol: 25,8 [3].**

Grenzflächen zweier Dielektrika

Seien ε und χ_e Konstante. Betrachte nun eine **Grenzfläche** zwischen zwei Medien mit Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ (Abb. 2.9):

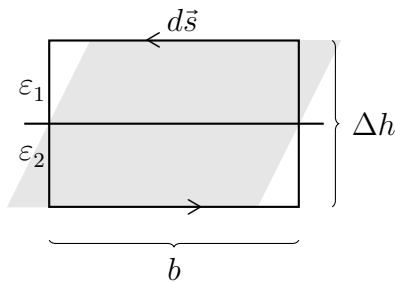


Abb. 2.9 Grenzfläche zweier Dielektrika

Die Grenzfläche wird dabei durch eine Kurve eingeschlossen, die oberhalb und unterhalb parallel zur Fläche verläuft, und deren Höhe Δh beliebig klein wird. Aus der Maxwell-Gleichung $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, und mit dem **Stokes'schen Satz** folgt

$$0 = \int_A d\vec{A} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \int_{\partial A} d\vec{s} \vec{E} = b(E_{1t} - E_{2t}) \Rightarrow \boxed{E_{1t} = E_{2t}}.$$

Die Tangentialkomponenten des \vec{E} -Feldes sind **an der Grenzfläche stetig**.

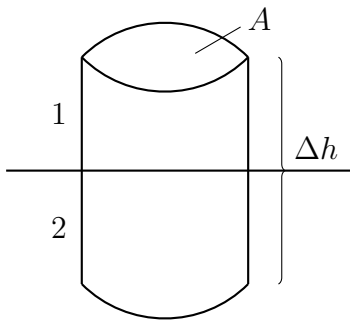


Abb. 2.10 Gauß'sche Dose

Normal zur Grenzfläche legt man eine Gauß'sche Dose (Abb 2.10) in die Fläche. Sind auf der Grenzfläche keine frei beweglichen Ladungen, gilt:

$$0 = \int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{D}$$

Rückt man mit $\Delta h \rightarrow 0$ die Oberfläche an die Grenzfläche 1 - 2 heran, kann das Flächenintegral von \vec{D} nur 0 bleiben, wenn die Normalkomponenten von \vec{D} **an der Grenzfläche gleich** sind:

$$0 = \oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{D} = A(D_{1n} - D_{2n}) \Rightarrow \boxed{D_{1n} = D_{2n}} .$$

Ist eine Flächenladung mit $\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta A}$ auf der Grenzfläche, wird analog $\boxed{D_{1n} - D_{2n} = 4\pi\sigma}$.

Für die **Polarisation** gilt entsprechend an der Grenzfläche:

$$4\pi(P_{2n} - P_{1n}) = E_{1n} - E_{2n} \quad \text{Normalkomponente}$$

$$4\pi(P_{1t} - P_{2t}) = D_{1t} - D_{2t} \quad \text{Tangentialkomponente}$$

Beispiel

Wir untersuchen eine **dielektrische Kugel** (Abb. 2.11) mit dem \vec{E} -Feld Übergang von innen nach außen: Eine Kugel mit Radius R , dielektrischer Konstante ε_2 sei in ein Dielektrikum mit ε_1 eingefügt. An der Grenzoberfläche der Kugel gilt $E_{1t} = E_{2t}$, $D_{1n} = D_{2n}$. Das \vec{E} -Feld im Dielektrikum 1 sei in großer Entfernung homogen, $\vec{E}(\vec{r})|_{r \gg R} \equiv \vec{E}_\infty = E_\infty \vec{e}_z$. \Rightarrow Dort ist das Potenzial $\Phi(\vec{r})|_{r \gg R} = -\vec{E}_\infty \cdot \vec{r} = -E_\infty \underbrace{r \cos \vartheta}_{=z}$ $\Rightarrow \Phi(\vec{r}) = f(r) \cos \vartheta$.

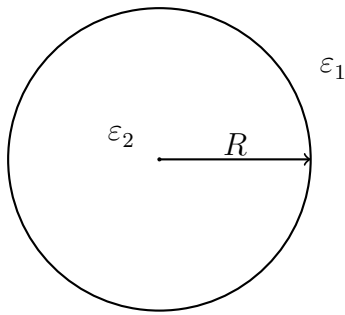


Abb. 2.11 Dielektrische Kugel

Die Lösung der Laplace-Gleichung

$$0 = \Delta\Phi(\vec{r}) = \Delta[f(r) \cos\vartheta]$$

ist eine Linearkombination aus r (homogenes Feld) und $1/r^2$ (Dipolfeld). Am Ursprung sitzt jedoch kein makroskopischer Dipol.

⇒ Lösungsansatz:

$$\Phi(\vec{r}) = \begin{cases} \Phi_1(\vec{r}) = \left(-E_\infty r + \frac{p}{r^2}\right) \cos\vartheta, & r \geq R \\ \Phi_2(\vec{r}) = -E_2 r \cos\vartheta, & r \leq R \end{cases}$$

An der Grenzfläche gilt:

$$(i) \quad E_{1t} = E_{2t}, \quad \Phi_1|_{|\vec{r}|=R} = \Phi_2|_{|\vec{r}|=R} \Rightarrow -E_\infty R + \frac{p}{R^2} = -E_2 R$$

$$(ii) \quad D_{1n} = D_{2n}, \quad D_n = -\varepsilon \frac{\partial\Phi}{\partial r} \Rightarrow \varepsilon_1 \left(E_\infty + \frac{2p}{R^3}\right) = \varepsilon_2 E_2$$

$$\Rightarrow \boxed{E_2 = \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} E_\infty}, \quad \boxed{p = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} R^3 E_\infty}.$$

$$(\Rightarrow \text{Für } \varepsilon_1 = \varepsilon_2: E_2 = E_\infty, p = 0)$$

Mit dem Gradienten in Kugelkoordinaten $\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ ergeben sich die elektrischen Felder außerhalb und innerhalb der Kugel:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{E}_1(\vec{r}) = -\nabla\Phi_1(\vec{r}) = \left(E_\infty + \frac{2p}{r^3}\right) \cos\vartheta \vec{e}_r - \left(E_\infty - \frac{p}{r^3}\right) \sin\vartheta \vec{e}_\vartheta, & r \geq R \\ \vec{E}_2(\vec{r}) = -\nabla\Phi_2(\vec{r}) = E_2 \cos\vartheta \vec{e}_r - E_2 \sin\vartheta \vec{e}_\vartheta, & r \leq R \end{cases}$$

Anmerkung: Es ist $\vec{E}_2(\vec{r}) \parallel \vec{e}_z$, da $\Phi_2(\vec{r}) = \Phi_2(z)$. Im Gegensatz dazu ist $\Phi_1(\vec{r}) = \Phi_1(x, y, z)$ und $\vec{E}_1 \neq E_1 \vec{e}_z$.

Aus dem Dipolmoment $\vec{p} = p\vec{e}_z$ ¹⁹ ergibt sich die **Polarisation im Innern der Kugel**,

$$\vec{P} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial V} = -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \underbrace{\frac{\partial R^3}{\partial V}}_{V = \frac{4\pi}{3} R^3} E_\infty \vec{e}_z = \boxed{-\frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E_\infty \vec{e}_z},$$

so dass diese das elektrische Feld um

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_\infty = -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E_\infty \vec{e}_z = -\frac{4\pi}{3} \vec{P}$$

verändert.

Ist die dielektrische Kugel **im Vakuum**, gilt mit $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 \equiv \epsilon$:

- innerhalb: $E_2 = \frac{3}{2+\epsilon} E_\infty \Rightarrow E_2 < E_\infty$
- außerhalb: $p = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} R^3 E_\infty$

Eine **Hohlkugel** (mit $\epsilon_2 = 1$) im Dielektrikum $\epsilon_1 \equiv \epsilon$ ergibt:

- innerhalb $E_2 = \frac{3\epsilon}{1+2\epsilon} E_\infty \Rightarrow E_2 > E_\infty$
- außerhalb: $p = \frac{1-\epsilon}{1+2\epsilon} R^3 E_\infty$

Das elektrische Feld ist in beiden Fällen homogen im Innern der Kugel, während es im Außenbereich inhomogen ist (Abb. 2.12).

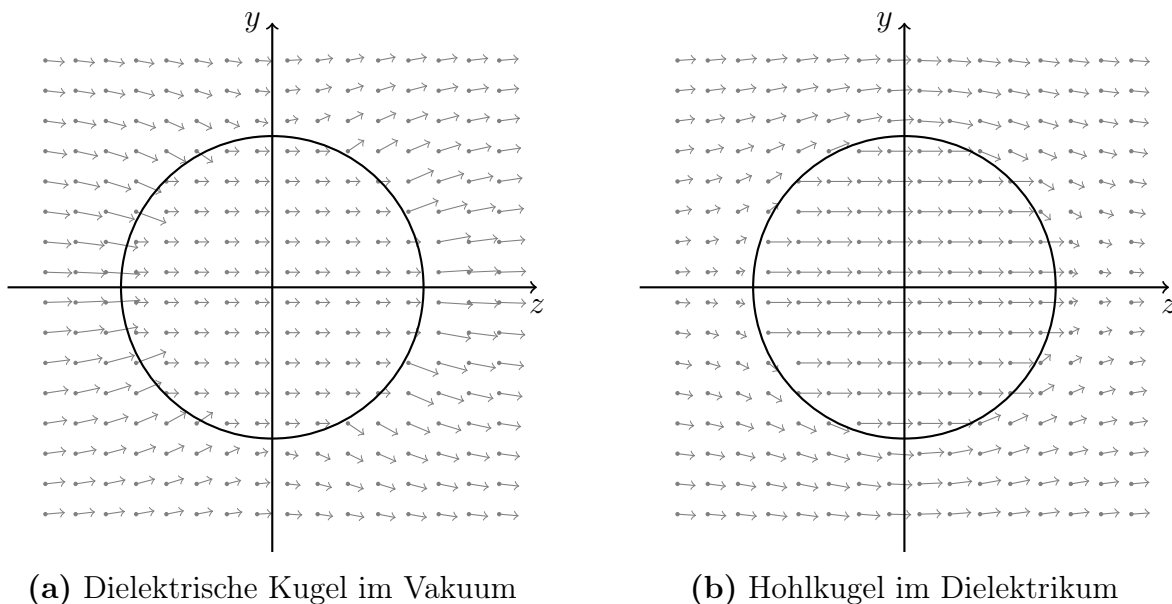


Abb. 2.12 Elektrisches Feld inner- und außerhalb zweier Kugeln

¹⁹Die Orientierung von \vec{p} ergibt sich durch nähere Betrachtung des Dipolterms in Φ_1 : $\frac{p}{r^2} \cos \vartheta = \frac{pz}{r^3} \stackrel{!}{=} \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}$
(vgl. Abschn. 2.5.1)

2.7 Elektrizität auf Leitern

Im Innern von Leitern ist $\vec{E}_i = 0$, da sonst die Ladungen verschoben würden. Das Potenzial im Leiter ist demnach konstant,

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = \Phi_i = \text{const}} .$$

Im **Außenbereich** ist das Potenzial durch die Lösung der Poisson²⁰-Gleichung bestimmt,

$$\boxed{\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})} \quad (\rho = \rho_f + \rho_p)$$

oder mit der Dichte frei beweglicher Ladungen ρ_f

$$\boxed{\vec{\nabla}[\varepsilon(\vec{r})\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})] = -4\pi\rho_f(\vec{r})} .$$

An der **Leiteroberfläche** ist $E_t(\vec{r}) = 0$, da die Feldstärke im Innern des Leiters verschwindet. Auf der Oberfläche werden Ladungen influenziert: die Oberflächenladungsdichte ist $\sigma(\vec{r})$. Die Ladungen sind über eine Schichtdicke l verschmiert. Integration über ein Oberflächenelement ergibt

$$\int d\vec{A} \vec{E}_a(\vec{r}) = 4\pi q = 4\pi \int dA \sigma(\vec{r}).$$

⇒ Feldstärke an der äußeren Oberfläche:

$$\vec{E}_a(\vec{r}) = 4\pi\sigma(\vec{r})\vec{n}$$

$$\boxed{-\frac{\partial\Phi}{\partial n} = -\vec{n}\vec{\nabla}\Phi = 4\pi\sigma(\vec{r})} \quad \text{Neumann'sche Randbedingung.}$$

Die Ladungsdichte σ an der Oberfläche setzt sich dabei zusammen aus dem frei beweglichen Anteil σ_f auf der Leiteroberfläche, und der Polarisationsladungsdichte σ_p auf dem Dielektrikum,

$$\boxed{\sigma(\vec{r}) = \sigma_f(\vec{r}) + \sigma_p(\vec{r})} \quad \text{mit} \quad \vec{D}_a(\vec{r}) = 4\pi\sigma_f(\vec{r})\vec{n},$$

und mit $4\pi\sigma_f = \vec{n}\vec{D}_a = \varepsilon\vec{n}\vec{E}_a = 4\pi(\sigma_f + \sigma_p)$ folgt

$$\sigma_f = \varepsilon(\sigma_f + \sigma_p) \quad \text{oder} \quad \boxed{\sigma_p = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\sigma_f} \quad \text{Polarisations-Ladungsdichte.}$$

Demnach verschwindet die Polarisationsladungsdichte auf Leitern an der Oberfläche im Vakuum, $\boxed{\sigma_p \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 1} 0}$.

²⁰Siméon Denis Poisson (*1781 Pithiviers, †1840 Paris), französischer Physiker und Mathematiker.

2.8 Kapazität und Kugelkondensator

Prinzip:

- Leiter, eingebettet im Vakuum oder in Dielektrika
- Keine frei beweglichen Ladungsdichten außerhalb der Leiter, $\rho_f = 0$; frei bewegliche Ladungen auf den Leitern

Ein **Kugelkondensator** besteht aus zwei konzentrischen leitenden Kugeln mit $R_1 < R_2$ mit den zugehörigen Ladungen q_1, q_2 (Abb. 2.13)

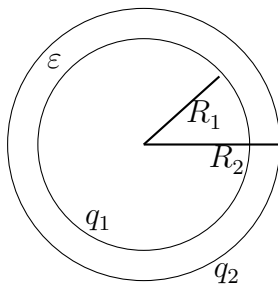


Abb. 2.13 Kugelkondensator

Das Potenzial wird im Außenraum $\Phi(r) = \frac{q_1+q_2}{r}$ ($r \geq R_2$) und zwischen den Kugeln $\Phi(r) \propto \frac{q_1}{\epsilon r}$ ($R_1 \leq r \leq R_2$). Bei $R = R_2$ muss das Potenzial stetig sein,

$$\Phi(r) = \frac{q_1}{\epsilon r} - \frac{q_1}{\epsilon R_2} + \frac{q_1 + q_2}{R_2}, \quad R_1 \leq r \leq R_2 .$$

Im Innenraum ist das Potenzial konstant, da das \vec{E} -Feld verschwindet,

$$\Phi(r) = \frac{q_1}{\epsilon R_1} - \frac{q_1}{\epsilon R_2} + \frac{q_1 + q_2}{R_2}, \quad r \leq R_1 .$$

Daraus folgen die Ladungen als Funktion der Potentiale $\Phi_i = \Phi(R_i)$, $i = 1, 2$:

$$q_1 = \frac{\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1} (\Phi_1 - \Phi_2)$$

$$q_2 = \frac{\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1} (\Phi_2 - \Phi_1) + R_2 \Phi_2 .$$

Der Zusammenhang zwischen Ladung und Potenzial wird durch die Kapazitätskoeffizienten C_{ij} gegeben, $\sum_j C_{ij} \Phi_j = q_i$.

Für ein **neutrales System** mit $q = q_1 = -q_2$ lässt sich q durch die Potenzialdifferenz ausdrücken,

$$q = C(\Phi_1 - \Phi_2) \quad \text{mit der Kapazität } C,$$

oder $C = \frac{q}{U}$ mit der **Spannung** U .

Die Dimension ist im Gauß-System

$$[C] = \frac{[\text{Ladung}]}{[\text{Spannung}]} = \frac{[\varrho][r^3]}{[E][r]} = \frac{\sqrt{\text{dyn}} \text{ cm}}{\sqrt{\text{dyn}}} = \text{cm} = [\text{Länge}],$$

im SI: $C_{\text{SI}} = 4\pi\epsilon_0 C_{\text{G}}$; $[C] = \text{Farad, F}$; Picofarad in praktischen Anwendungen.

Beim geerdeten Kugelkondensator mit $\Phi_2 = 0$ wird

$$\Phi_1 = \frac{q_1}{\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow C = \frac{\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Wegen $C \propto \epsilon$ lässt sich die Kapazität durch ein Dielektrikum mit großem ϵ wesentlich erhöhen.

Ein **Plattenkondensator** (Abb. 2.14) besteht aus Platten der Fläche A im Abstand d mit Ladung q . Es gilt $\vec{\nabla} \vec{D} = 4\pi \varrho_f \Rightarrow \int d^3 r \vec{\nabla} \vec{D} = 4\pi \int d^3 r \varrho_f = 4\pi q_f = \int_A d\vec{A} \vec{D}(\vec{r})$, so dass die frei beweglichen Ladungen q_f einen Fluss $D \cdot A = 4\pi q_f$ erzeugen.

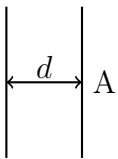


Abb. 2.14 Plattenkondensator

\Rightarrow Die **Potenzialdifferenz** zwischen den Platten ist $\Phi = \frac{D}{\epsilon} \cdot d = \frac{4\pi d}{\epsilon A} \cdot q_f$

$$\Rightarrow C = \frac{q_f}{\Phi} = \frac{\epsilon A}{4\pi d}.$$

($C \propto \epsilon A/d$) folgt auch für den Kugelkondensator mit $R_2 = R_1 + d$, $d = \text{const}$, $R_1 \rightarrow \infty$.)

2.9 Feldenergie in Materie

Mit der Maxwell-Gleichung in Materie

$$\vec{\nabla} \vec{D}(\vec{r}) = 4\pi \varrho_f(\vec{r})$$

wird die Feldenergie

$$U = \frac{1}{2} \int d^3 r \varrho_f(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} \int d^3 r [\vec{\nabla} \vec{D}(\vec{r})] \Phi(\vec{r}).$$

Wegen $(\vec{\nabla} \vec{D})\Phi = \vec{\nabla}(\vec{D}\Phi) - \vec{D}\vec{\nabla}\Phi$ ergibt dann die Anwendung des Gauß'schen Satzes

$$U = \frac{1}{8\pi} \int d\vec{A} \vec{D}(\vec{r})\Phi(\vec{r}) - \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{D}(\vec{r}) \underbrace{\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})}_{=-\vec{E}(\vec{r})}.$$

Sind alle Ladungen ϱ_f in einer Kugel vom Radius R eingeschlossen, gilt für $R \rightarrow \infty$ (Beitrag der Ladungsdichte ϱ zum Potenzial Φ)

$$\Phi \propto \frac{1}{R}; \quad D \propto \frac{1}{R^2}; \quad \int d\vec{A} \vec{D}\Phi \propto \frac{1}{R} \rightarrow 0,$$

und die elektrostatische Energie in Materie wird

$$\boxed{U = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{D}(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})}.$$

Im **Vakuum** mit $\varepsilon = 1$, $\vec{D} = \vec{E}$ geht das in den bekannten Ausdruck über,

$$U^{\text{vac}} = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}^2(\vec{r}).$$

Die **Kraft auf dielektrische Körper** im \vec{E} -Feld wird für einen Dipol \vec{p}

$$\boxed{\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}}.$$

Das Dipolmoment \vec{p} folgt durch Integration der Dipolmomentdichte (Polarisation) \vec{P} über das Volumen (wegen $\vec{P} \equiv \frac{\partial \vec{p}}{\partial V}$),

$$\vec{p} = \int_V d^3r \vec{P}(\vec{r}).$$

Sofern das \vec{E} -Feld im Volumen V konstant ist, wird das mit $\vec{p} = \chi_e \vec{E} = \frac{\varepsilon-1}{4\pi} \vec{E}$

$$\boxed{\vec{p} = \frac{\varepsilon-1}{4\pi} V \vec{E}},$$

und man erhält für die Kraft mit i. Allg. \vec{r} -abhängigem $\vec{E}(\vec{r})$ sowie den Regeln der Vektoranalysis:

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} = \frac{\varepsilon-1}{4\pi} V [\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}] \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\varepsilon-1}{8\pi} V \vec{\nabla} \vec{E}^2(\vec{r}),$$

wobei als Folge der Anwendung der Produktregel ein zusätzlicher Faktor $\frac{1}{2}$ auftaucht.

Genauer (zur Notation siehe Abschn. 4.2):

$$\begin{aligned} \vec{E} \times \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{=0 \text{ Elektrostatik}} &= E^i \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{jlm} \partial_l E_m = E^i \partial_l E_m (\delta^m_i \delta^l_k - \delta^l_i \delta^m_k) \\ &= E^i \partial_k E_i - E^i \partial_i E_k = E^i \vec{\nabla} E_i - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \\ &= \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{E}^2) - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}, \end{aligned}$$

wobei $\frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{E}^2) = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(E_i E^i) = \frac{1}{2}(E_i \vec{\nabla} E^i + E^i \vec{\nabla} E_i) = E^i \vec{\nabla} E_i$ verwendet wurde.

Beispiel: Dielektrischer Körper im Coulomb-Feld,

$$\vec{E}(\vec{r}) = q \frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \vec{\nabla} \vec{E}^2(\vec{r}) = -4q^2 \frac{\vec{r}}{r^6} \propto \vec{F}.$$

Der Körper wird in das elektrische Feld hineingezogen mit $\vec{F} \propto \frac{-\vec{r}}{r^6}$, so dass die **Energie minimiert** wird.

2.10 Bildladungen

Die Methode der **Bild-** oder **Spiegelladungen** verwendet man, wenn Punktladungen zusammen mit **Leitern** betrachtet werden, die – durch Erdung ($\Phi = 0$) oder eine Spannungsquelle – auf konstantem Potenzial gehalten werden.

Das **Potenzial** soll in dem Raumgebiet berechnet werden, das nicht vom Leiter belegt ist. Zur Lösung führt man eine (fiktive) Bildladung außerhalb des Gebietes ein, in dem das Potenzial berechnet werden soll, und simuliert so die Randbedingungen.

Beispiel

Ein Halbraum ist durch einen Leiter mit $\Phi = 0$ gefüllt. Im leeren Halbraum ist eine Punktladung $+q$ (Abb. 2.15); man berechne das Potenzial im Halbraum mit der Punktladung.

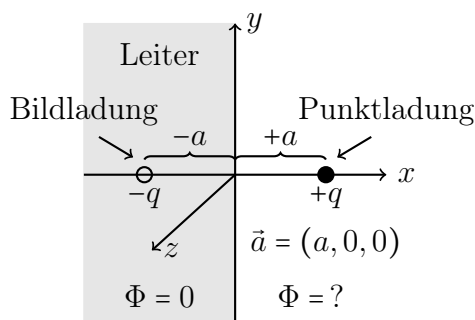


Abb. 2.15 Methode der Spiegelladungen

Die Punktladung wird am Leiterrand gespiegelt; die Bildladung hat das umgekehrte Vorzeichen. Für das (mit Bildladung symmetrische) Potenzial machen wir den Ansatz

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{a}|} - \frac{q}{|\vec{r} + \vec{a}|}$$

Auf dem **Leiterrand** $\vec{r}_w = (0, y_w, z_w)$ muss das Potenzial verschwinden:

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}_w) &\stackrel{!}{=} 0; & \Phi(\vec{r}_w) &= \frac{q}{|\vec{r}_w - \vec{a}|} - \frac{q}{|\vec{r}_w + \vec{a}|} = 0 \\ & & \Rightarrow |\vec{r}_w - \vec{a}| &= |\vec{r}_w + \vec{a}| \\ & & |(-a, y_w, z_w)| &= |(a, y_w, z_w)|\end{aligned}$$

Wegen $|-a| = |a| = a$ ist dies stets erfüllt, der Potenzialansatz also gerechtfertigt.

\Rightarrow **\vec{E} -Feld:**

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = q \left[\frac{\vec{r} - \vec{a}}{|\vec{r} - \vec{a}|^3} - \frac{\vec{r} + \vec{a}}{|\vec{r} + \vec{a}|^3} \right].$$

An der Leiteroberfläche ist $|\vec{r}_w - \vec{a}| = |\vec{r}_w + \vec{a}|$:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}_w) &= \frac{q}{|\vec{r}_w - \vec{a}|^3} [\vec{r}_w - \vec{a} - \vec{r}_w - \vec{a}] = -2 \frac{q\vec{a}}{|\vec{r}_w - \vec{a}|^3} \propto \vec{a} \\ \Rightarrow \vec{E} \parallel \vec{a} \perp \vec{r}_w &\Rightarrow E_t = 0 \Leftrightarrow E_y = E_z = 0 \quad \text{auf dem Rand.}\end{aligned}$$

Mit $|\vec{r}_w - \vec{a}| = \sqrt{a^2 + y_w^2 + z_w^2} = \sqrt{a^2 + r_w^2}$ folgt

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}_w) = -2 \frac{q\vec{a}}{(\sqrt{a^2 + r_w^2})^3}} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{\vec{n} \cdot \vec{E}(\vec{r}_w)}{4\pi} = \frac{E_x(\vec{r}_w)}{4\pi} = -\frac{qa}{2\pi(\sqrt{a^2 + r_w^2})^3}},$$

Integration über die Leiterfläche ergibt die **Bildladung**:

$$\int d\vec{A} \sigma = -\frac{qa}{2\pi} \int_0^\infty dr_w r_w \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{(\sqrt{a^2 + r_w^2})^3} = -q \left(\text{mit } \int_0^\infty dr_w r_w \frac{1}{(\sqrt{a^2 + r_w^2})^3} = \frac{1}{a} \right).$$

2.11 Green'scher Satz und Green'sche Funktion

Zur Lösung von **Randwertproblemen** – insbesondere bei Metallen – benutzen wir den **Green'schen²¹ Satz** und die **Green'sche Funktion** [4].

Beispiel

Für eine geschlossene metallische Oberfläche im Volumen V soll das Potenzial im umgebenden Raum unter bestimmten Randbedingungen durch Lösen der Poisson-Gleichung berechnet werden,

$$\boxed{\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})}.$$

²¹George Green (*1793 Sneinton, +1841 Nottingham), britischer Müller, Mathematiker und Physiker.

Für die Lösung gibt es zwei mögliche Randbedingungen (Abb. 2.16):

- (1) **Dirichlet'sche Randbedingung**²²: Das **Potenzial** ist auf der Oberfläche A vorgegeben, $\Phi(\vec{r}) = \Phi_0$ auf A (insbesondere $\Phi_0 = 0$);
- (2) **Neumann'sche Randbedingung**²³: Die **Flächenladung** ist auf der Oberfläche vorgegeben, $\frac{\partial\Phi}{\partial n} = -4\pi\sigma(\vec{r})$ auf A mit $\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}\Phi$.

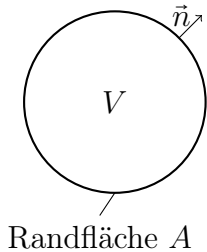


Abb. 2.16 Randbedingungen beim Lösen der Poissongleichung

Eine **partielle Lösung** der Poisson-Gleichung im Volumen V ist

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

dazu kommt die Lösung der **homogenen Gleichung** (Laplace-Gleichung). Damit lassen sich die Randbedingungen (1) oder (2) erfüllen.

Die **Eindeutigkeit** der Lösung lässt sich mithilfe der **Green'schen Identität** zeigen.

Seien zwei Potenziale $\Phi_1(\vec{r}), \Phi_2(\vec{r})$ gegeben. Es ist

$$\underbrace{\vec{\nabla}[\Phi_1(\vec{r})\vec{\nabla}\Phi_2(\vec{r})]}_{\equiv \vec{a}(\vec{r})} = \Phi_1(\vec{r})\Delta\Phi_2(\vec{r}) + [\vec{\nabla}\Phi_1(\vec{r})]\vec{\nabla}\Phi_2(\vec{r}).$$

Mit dem Satz von Gauß, $\oint_A d\vec{A} \vec{a}(\vec{r}) = \int_V d^3r \vec{\nabla} \vec{a}(\vec{r})$ folgt die sogenannte **erste Green'sche Identität**,

$$\oint_A dA \Phi_1 \underbrace{\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}}_{=\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\Phi_2} = \oint_A \underbrace{d\vec{A}}_{=dA\vec{n}} \Phi_1 \vec{\nabla}\Phi_2 = \int_V d^3r \left[\Phi_1 \Delta\Phi_2 + \underbrace{(\vec{\nabla}\Phi_1)\vec{\nabla}\Phi_2}_{\text{symmetrisch in } \Phi_1, \Phi_2} \right].$$

Vertausche $\Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2$ und subtrahiere die Gleichungen \Rightarrow der symmetrische Term fällt weg, es ergibt sich der **Green'sche Satz**:

$$\oint_A dA \left[\Phi_1 \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} - \Phi_2 \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} \right] = \int_V d^3r [\Phi_1 \Delta\Phi_2 - \Phi_2 \Delta\Phi_1].$$

²²Peter Gustav Lejeune Dirichlet (*1805 Düren, +1859 Göttingen), deutscher Mathematiker.

²³Carl Gottfried Neumann (*1832 Königsberg, +1925 Leipzig), deutscher Mathematiker.

Eindeutigkeit der Lösung

Annahme: \exists zwei Lösungen $\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2$ mit $U \equiv \hat{\Phi}_2 - \hat{\Phi}_1 \neq 0$. Dann gilt:

(i) U erfüllt die Laplace-Gleichung $\Delta U = 0$.

(ii) Auf dem Rand ist $U(\vec{r}) = 0$ für RB(1) oder $\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial n} = 0$ für RB(2).

Da die erste Green'sche Identität für allgemeine Potentiale gilt, muss sie auch für den Fall $\Phi_1 = U = \Phi_2$ gelten. Wegen (i) und (ii) ergibt sich

$$0 = \oint_A dA U(\vec{r}) \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial n} = \int_V d^3r [\vec{\nabla} U(\vec{r})]^2,$$

d. h. $\vec{\nabla} U(\vec{r}) = 0$ und damit $U(\vec{r}) = \text{const}$ in V .

\Rightarrow Φ_1 und Φ_2 unterscheiden sich nur um eine (physikalisch unbedeutende) Konstante. (Im Falle von RB(1) folgt aus $U(\vec{r})|_A = 0$ sogar direkt $\text{const} = 0 \Rightarrow \Phi_1 = \Phi_2$.)

Randbedingungen mit Green'scher Funktion

In der Poisson-Gleichung mit einer Einheitspunktladung am Ort \vec{r} ist die Green'sche Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}')$ definiert durch

$$\Delta_{\vec{r}'} G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

Die Green'sche Funktion ist **symmetrisch**:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r}).$$

Beweis mit dem Green'schen Satz für

$$\Phi_1 \equiv G(\vec{r}, \vec{r}''), \quad \Phi_2 \equiv G(\vec{r}', \vec{r}'').$$

Das Oberflächenintegral ist Null wegen der Randbedingungen und dadurch

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^3r'' [\Phi_1 \Delta \Phi_2 - \Phi_2 \Delta \Phi_1] \\ &= -4\pi \int d^3r'' G(\vec{r}, \vec{r}'') \delta(\vec{r}' - \vec{r}'') + 4\pi \int d^3r'' G(\vec{r}', \vec{r}'') \delta(\vec{r} - \vec{r}'') \\ &= -4\pi [G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}', \vec{r})] \quad \Rightarrow \quad G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r}). \end{aligned}$$

Bei **Translationsinvarianz** gilt ferner

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G(|\vec{r} - \vec{r}'|).$$

Mit Green'schen Funktionen lassen sich die beiden Randbedingungen formulieren als:

- (1) $G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ für $\vec{r}' \in A$ (denn das Potenzial soll dort Null sein),
- (2) $\frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{A}$ für $\vec{r}' \in A$ (Normalenvektor zeigt aus der Fläche heraus).

Im **Fall (1)** wenden wir mit $\Phi_1 = \Phi$, $\Phi_2 = G$ den **Green'schen Satz** an:

$$\begin{aligned} & \oint_A dA' \left[\Phi(\vec{r}') \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} - \underbrace{G_D(\vec{r}, \vec{r}')}_{=0} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right] \\ &= \int_V d^3r' [\Phi(\vec{r}') \Delta_{\vec{r}'} G_D(\vec{r}, \vec{r}') - G_D(\vec{r}, \vec{r}') \Delta_{\vec{r}'} \Phi(\vec{r}')] \\ &= -4\pi \Phi(\vec{r}) - \int_V d^3r' G_D(\vec{r}, \vec{r}') [-4\pi \varrho(\vec{r}')], \end{aligned}$$

so dass sich das Potenzial $\Phi(\vec{r})$ mithilfe der Green'schen Funktion (welche die Randbedingungen berücksichtigt) berechnen lässt als

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' G_D(\vec{r}, \vec{r}') \varrho(\vec{r}') - \frac{1}{4\pi} \oint_A dA' \Phi(\vec{r}') \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}.$$

Für die **Neumann'sche Randbedingung (2)** gilt analog zu (1) nach Anwendung des Green'schen Satzes

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' G_N(\vec{r}, \vec{r}') \varrho(\vec{r}') + \frac{1}{4\pi} \oint_A dA' G_N(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \Phi(\vec{r}')}{\partial n'} + \oint_A dA' \frac{\Phi(\vec{r}')}{A'}.$$

Der Normalenvektor \vec{n}' zeigt in das Metall hinein, auf der Oberfläche ist

$$\left. \frac{\partial \Phi(\vec{r}')}{\partial n'} \right|_{\vec{r}' \in A} = 4\pi \sigma \quad (\text{positives Vorzeichen}).$$

Wird die Fläche A sehr groß ($A \rightarrow \infty$), entfällt der dritte Term des Potenzials bei Neumann'scher Randbedingung wegen $1/A \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \int_V d^3r' G_N(\vec{r}, \vec{r}') \varrho(\vec{r}') + \frac{1}{4\pi} \oint_A dA' G_N(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \Phi(\vec{r}')}{\partial n'} \\ &= \int_V d^3r' G_N(\vec{r}, \vec{r}') \varrho(\vec{r}') + \oint_A dA' G_N(\vec{r}, \vec{r}') \sigma(\vec{r}') \end{aligned}$$

Auch im Neumann'schen Fall lässt sich das Potenzial also explizit berechnen.

Anmerkung: Mit dem Satz von Gauß ist

$$\begin{aligned}
 -4\pi &= \int_V d^3r' \Delta_{\vec{r}'} G_N(\vec{r}, \vec{r}') = \oint_A d\vec{A}' \vec{\nabla}_{\vec{r}'} G_N(\vec{r}, \vec{r}') = \oint_A dA' \frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \\
 &\Rightarrow \frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \neq 0 \quad \text{auf dem Rand,}
 \end{aligned}$$

d. h. die Annahme $G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \wedge \frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} = 0$ auf dem Rand führt zu einem Widerspruch: Bei willkürlich vorgegebenen Werten von Φ und $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ (Cauchy'sches Randwertproblem) hat die Poisson-Gleichung **keine** Lösung bei geschlossener Fläche. (Offene Fläche siehe **Sommerfeld**, [5]).

Literatur

- [1] Stokes, G. G.: Mathematical and physical papers. 5 Bände, Cambridge (1880–1905)
- [2] Olive, K. A. et al. (Particle Data Group): Review of Particle Physics. Chin. Phys. C 38, 090001 (2014)
- [3] Haynes, W. M. (Hrsg.): CRC Handbook of Chemistry and Physics. 95. Aufl., CRC Press (2014/15)
- [4] Green, G.: An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism. Nottingham (1828)
- [5] Sommerfeld, A.: Vorlesungen über theoretische Physik Bd. 6: Partielle Differentialgleichungen der Physik. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig (1948)

3 Magnetostatik

In der Magnetostatik untersuchen wir magnetische Phänomene, die durch zeitlich konstante Ströme entstehen: Die Magnetfelder sind stationär, $\dot{\vec{B}} = 0$, sowie $\dot{\vec{D}} = 0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$.

Die Maxwell-Gleichungen werden

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

mit $\vec{j} \equiv \vec{j}_q$ Ladungsstrom, da der Verschiebungsstrom wegen $\dot{\vec{D}} = 0$ verschwindet: Der Ladungsstrom induziert das Magnetfeld. Das Magnetfeld ist quellfrei: \nexists magnetische Monopole.

Im **Vakuum** mit $\mu = 1$, $\vec{H} = \vec{B}$ wird

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} .$$

\Rightarrow Das Magnetfeld hat nur dort eine Rotation, wo die Ladungsstromdichte nicht verschwindet: **Außerhalb** von Leitern ist $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$, so dass **dort** $\vec{B}_{\text{ausser}} = \vec{\nabla} \Phi_k$, d. h. Gradient eines skalaren Potentials ist; **im** Leiter gilt dies nicht, so dass eine andere Formulierung des Potentials notwendig ist: ein **Vektorpotential**.

Das Magnetfeld lässt sich als **Rotation eines Vektorfeldes** \vec{A} schreiben, da die Divergenz einer Rotation verschwindet,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad , \quad \text{da } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 .$$

Ferner können wir ersetzen $\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \psi$ mit einem skalaren Feld ψ , ohne dass sich das Magnetfeld ändert: Spezialfall einer Eichtransformation, s. Abschn. 3.4.

Die Quellfreiheit des Magnetfeldes wird in integraler Form mit dem Gauß'schen Satz,

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) d^3 r = \oint_F d\vec{f} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

d. h., es gehen genauso viele magnetische Feldlinien durch die Fläche F , die ein Volumen V umschließt, heraus wie herein: Feldlinien beginnen oder enden nicht im Raum.

3.1 Ampère'sches Gesetz

Das **Ampère'sche Gesetz** [1] folgt aus der Maxwell-Gleichung durch Flächenintegration

$$\int_F d\vec{f} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \int_F d\vec{f} \vec{j}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} I$$

und mit dem Stokes'schen Satz als

$$\oint_{\partial F} d\vec{r} \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} I$$

Das Gesetz hätte auch nach Ørsted benannt werden können, der 1820 die magnetische Wirkung des elektrischen Stromes als Erster entdeckte.

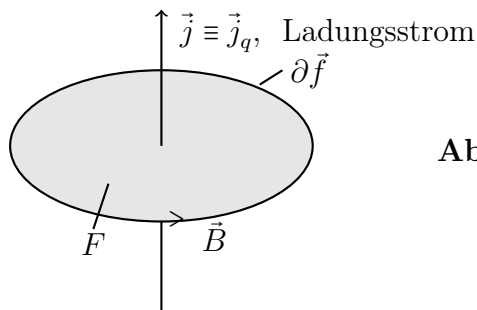


Abb. 3.1 Zum Ampère'schen Gesetz

Das Linienintegral der magnetischen Induktion über eine geschlossene Kurve ist gleich dem $4\pi/c$ -fachen des Stromes durch die Kurve; es gilt die Rechtsschraubenregel (Abb. 3.1). Beachte: Die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ ist vektoriell und hat eine Richtung, die Stromstärke $I = \int d\vec{f} \vec{j}(\vec{r})$ ist skalar.

3.2 Magnetischer Kraftfluss

Der Kraftfluss ψ^m durch eine Fläche F ist

$$\psi^m := \int_F d\vec{f} \vec{B}(\vec{r})$$

Er hängt nur vom Rand ∂F der Fläche ab, nicht von der Fläche selbst.

Beweis: Seien F_1, F_2 zwei Flächen mit gleichem Rand ∂F (Abb. 3.2). Bilde die Differenz des Flusses

$$\psi_1^m - \psi_2^m = \int_{F_1} d\vec{f} \vec{B}(\vec{r}) - \int_{F_2} d\vec{f} \vec{B}(\vec{r}) = \oint_{F=F_1 \cup F_2} d\vec{f} \vec{B}(\vec{r}) \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) \stackrel{\text{MWG}}{=} 0$$

(F_1 und F_2 sind in die gleiche Richtung orientiert, bei Addition Vorzeichen ändern.)

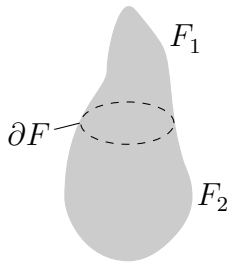


Abb. 3.2 Der magnetische Kraftfluss durch eine Fläche F hängt nur vom Rand der Fläche ∂F ab

3.3 Biot-Savart'sches Gesetz

Dieses ermöglicht die Berechnung des magnetischen Feldes einer Stromverteilung. Es folgt aus der Maxwell-Gleichung für die Magnetostatik

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r})$$

durch Bildung der Rotation:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \times \vec{j} &= \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} \quad \text{da} \quad \Delta \vec{a} \equiv \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{a} \\ &\Rightarrow \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \times \vec{j} = -\Delta \vec{B}, \quad \text{wegen} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{und damit} \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta \vec{B}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \times \vec{j}(\vec{r})}.$$

Diese Gleichung hat die Lösung:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \times \vec{j}(\vec{r}') \quad [\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \equiv \vec{\nabla}'] .$$

Es ist

$$\begin{aligned} \int_V d^3r' \vec{\nabla}' \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times \vec{j}(\vec{r}') \right] &= \int_V d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \times \vec{j}(\vec{r}') + \int_V d^3r' \left(\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{j}(\vec{r}') \\ &\stackrel{\text{Gauß}}{=} \oint_F d\vec{f}' \times \vec{j}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{da } \propto 1/r) \\ &\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = -\frac{1}{c} \int_V d^3r' \left(\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{j}(\vec{r}'), \end{aligned}$$

und mit

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \vec{\nabla}' [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-1/2} \\ &= -\frac{1}{2} [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-3/2} \cdot (-2) \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{pmatrix} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\end{aligned}$$

folgt das **Biot²⁴-Savart'sche²⁵ Gesetz**:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times \vec{j}(\vec{r}')$$

Ist die Ausdehnung des Leiters senkrecht zur Stromrichtung vernachlässigbar klein (Abb. 3.3), so wird

$$\begin{aligned}d^3r' \vec{j}(\vec{r}') &\cong d\vec{f}' dl' \vec{j}(\vec{r}') \vec{e} = I d\vec{r}' \\ \Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{I}{c} \int \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times d\vec{r}'\end{aligned}$$

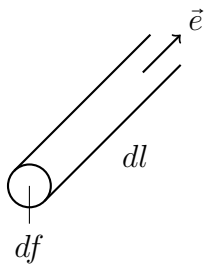


Abb. 3.3 Leiter mit $dl \cdot \vec{e} = d\vec{r}$

Beispiel: Berechne das \vec{B} -Feld in der Mittelachse (z -Achse) eines Kreisstromes (Abb. 3.4).

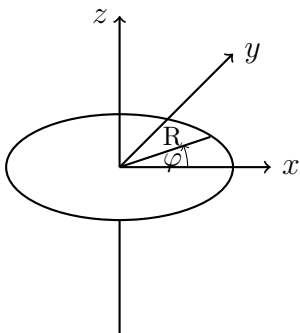


Abb. 3.4 Magnetfeld in der z -Achse eines Kreisstromes

²⁴Jean-Baptiste Biot (*1774 Paris, +1862 Paris), französischer Physiker und Mathematiker.

²⁵Félix Savart (*1791 Charleville-Mézières, +1841 Paris), französischer Arzt und Physiker.

Es ist $\vec{r} = z \cdot \vec{e}_z$, $\vec{r}' = \underbrace{(R \cos \varphi, R \sin \varphi, z')}_{x' \quad y'}$ und $d\vec{r} = (-R \sin \varphi, R \cos \varphi, 0)d\varphi$

$$\Rightarrow (\vec{r}' - \vec{r}) \times d\vec{r}' = [R(z - z') \cos \varphi, R(z - z') \sin \varphi, R^2] d\varphi$$

$$|\vec{r}' - \vec{r}| = |R \cos \varphi, R \sin \varphi, z - z'| = [R^2 + (z - z')^2]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(0, 0, z) = \int \frac{dz' 2\pi I R^2}{c [R^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \cdot \vec{e}_z}.$$

Durch Integration folgt daraus das Feld im Innern einer **Spule** der Länge l (Abb. 3.5) mit N Windungen,

$$\vec{B}(0, 0, z) = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{N dz'}{l} \frac{2\pi I R^2 \cdot \vec{e}_z}{c [R^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{2\pi I N}{cl} \cdot \vec{e}_z \left[\frac{\frac{l}{2} - z}{\sqrt{R^2 + (z - \frac{l}{2})^2}} + \frac{\frac{l}{2} + z}{\sqrt{R^2 + (z + \frac{l}{2})^2}} \right].$$

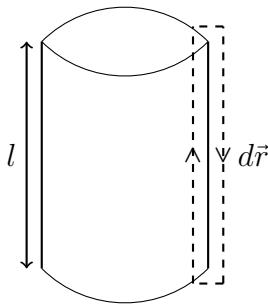


Abb. 3.5 Spule der Länge l

Für eine sehr lange Spule mit $l \gg R$ folgt im Innenbereich ($|z| \ll \frac{l}{2}$) mit $[\dots] \cong \frac{l/2}{l/2} + \frac{l/2}{l/2} = 2$,

$$\boxed{\vec{B}(0, 0, z) = \frac{4\pi I N}{cl} \vec{e}_z}.$$

Außerhalb der Spule ist die magnetische Induktion klein gegen diesen Wert, denn für einen geschlossenen Weg, der den Spulenrand einschließt, liefert das Ampère'sche Gesetz für das **Integral** der Induktion

$$\oint d\vec{r} \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \cdot I \cdot N.$$

Dies entspricht näherungsweise dem Wert im Innern der Spule, der Wert im Außenbereich muss also klein sein (Abb. 3.5).

3.4 Vektorpotenzial

In der **Elektrostatik** lässt das elektrische Feld sich aufgrund seiner Rotationsfreiheit ($\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$) als Gradient eines skalaren Potentials darstellen,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}), \quad \text{denn} \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\Phi) \equiv 0.$$

In der **Magnetostatik** gilt das analog nur außerhalb von Leitern, denn dort ist $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$. Die magnetische Induktion lässt sich jedoch wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ stets als Rotation eines vektoriellen Potentials $\vec{A}(\vec{r})$ darstellen,

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})}.$$

Ein expliziter Ausdruck für das Vektorpotenzial lässt sich aus dem Biot-Savart'schen Gesetz herleiten,

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= -\frac{1}{c} \int d^3r' \left(\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{j}(\vec{r}') \\ &= +\frac{1}{c} \int d^3r' \left(\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{j}(\vec{r}') \\ &=: \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}), \quad \left[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \frac{1}{r} = 0 \right] \end{aligned}$$

mit dem **Vektorpotenzial** $\vec{A}(\vec{r})$,

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}};$$

wegen $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ ist $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ erfüllt.

Dieses Vektorpotenzial ist divergenzfrei:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \int_V d^3r' \left[\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \cdot \vec{j}(\vec{r}') = -\frac{1}{c} \int_V d^3r' \left[\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \cdot \vec{j}(\vec{r}') \\ &= +\frac{1}{c} \int_V d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') = 0 \quad \text{da} \quad \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') = 0 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus

$$\begin{aligned} \int_V d^3r' \vec{\nabla}' \left[\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] &= \int_V d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \vec{j}(\vec{r}') + \int_V d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &\stackrel{\text{Gauß}}{=} \underbrace{\oint_F d\vec{f}' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{\propto 1/r \rightarrow 0 \text{ für } V \rightarrow \infty} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \vec{A}(\vec{r}) = 0 \quad \text{Coulomb-Eichung}} .$$

Das Vektorpotenzial $\vec{A}(\vec{r})$ ist in der Elektrodynamik (klassisch) nicht direkt messbar; Messgröße ist die Kraft, die durch die magnetische Induktion bestimmt wird. (Beachte den Unterschied zur Quantenmechanik: Dort ist das Vektorpotenzial bei festgelegter Eichung via Aharonov-Bohm-Effekt [2] messbar).

Eichtransformation

Wie eingangs dargestellt, lässt sich das Vektorpotenzial $\vec{A}(\vec{r})$ **umeichen**, ohne das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$ zu verändern:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) \rightarrow \vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\psi(\vec{r})}$$

mit einer beliebigen, zweifach differenzierbaren skalaren Funktion $\psi(\vec{r})$, denn $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\psi(\vec{r}) = 0$.

Die Rotation des Magnetfeldes ist

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})] = \vec{\nabla}[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})] - \Delta \vec{A}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}).$$

Mit der Eichfreiheit von $\vec{A}(\vec{r})$ können wir die **Divergenz des Vektorpotenzials** festlegen. In der Magnetostatik mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = 0$ ergab sich die **Coulomb-Eichung** $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0$, so dass folgt

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) ,$$

analog zur Poisson-Gleichung in der Elektrostatik. Die dort gemachten Aussagen zur **Eindeutigkeit** des Potentials Φ gelten analog für das Vektorpotenzial \vec{A} , mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

In der vollen (zeitabhängigen) Elektrodynamik ist der Strom jedoch nicht divergenzfrei: Es gilt die Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. Die Eichfreiheit der elektrodynamischen Potentiale wird dort beispielsweise in der sogenannten **Lorenz²⁶-Eichung** ausgenutzt:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0} , \quad (\Leftrightarrow \partial_\mu A^\mu = 0)$$

sie ist z. B. bei der Berechnung elektromagnetischer Wellen vorteilhaft.

²⁶Ludvig Valentin Lorenz (*1829 Helsingør, †1891 Frederiksberg), dänischer Physiker.

3.5 Multipolentwicklung und magnetisches Moment

Eine lokalisierte Stromverteilung mit Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ (Abb. 3.6) erzeuge ein Vektorpotenzial $\vec{A}(\vec{r})$ mit den Komponenten

$$A_i(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{j_i(\vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

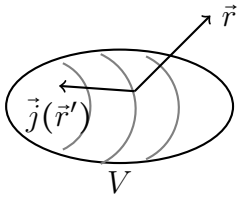


Abb. 3.6 Stromverteilung erzeugt Vektorpotenzial

Für $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ – mit einem Punkt \vec{r} weit außerhalb von V – gilt in erster Ordnung die Entwicklung

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{\vec{r}^2 + \vec{r}'^2 - 2\vec{r}\vec{r}'}} \cong \frac{1}{|\vec{r}|} \left(\underbrace{1}_{\text{magnetischer Monopol}} + \underbrace{\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|^2}}_{\text{Dipol}} \right) \quad \text{analog zur Elektrostatik.}$$

Dort war der Dipol ($l = 1$)

$$\int_V d^3 r' \varrho(\vec{r}') P_l(\cos \theta) \left(\frac{r'}{r} \right)^l \frac{1}{r} \stackrel{l=1}{=} \int_V d^3 r' \varrho(\vec{r}') \frac{r' r \cos \theta}{r^3} = \int_V d^3 r' \varrho(\vec{r}') \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|^3}.$$

Analog wird der magnetische Dipolterm der Entwicklung des Vektorpotenzials

$$\vec{A}^{\text{Dipol}}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}')}{|\vec{r}|^3},$$

fällt also auch mit $1/r^2$ ab. Auch die höheren Terme der magnetischen Multipolentwicklung verhalten sich analog zum elektrostatischen Fall (Quadrupol, Oktupol; der Monopol verschwindet, $\frac{1}{c} \int_V d^3 r' j_i(\vec{r}') = 0$).

Zum Verschwinden des magnetischen Monopolterms:

Beh.: Für $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ verschwindet für beliebige nichtsinguläre Funktionen $f(\vec{r})$, $g(\vec{r})$ das Integral

$$I = \int_V d^3 r [f \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g + g \cdot \vec{j} \cdot \vec{\nabla} f] = \int_V d^3 r [f \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g - f \vec{\nabla} \cdot (g \cdot \vec{j})]$$

Beweis: Differenziere partiell im zweiten Term; die Randterme verschwinden bei lokalisiertem $\vec{j}(\vec{r})$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(g \cdot \vec{j}) &= \vec{j} \vec{\nabla} g + g \vec{\nabla} \vec{j} = \vec{j} \vec{\nabla} g \quad \text{wegen } \vec{\nabla} \vec{j} = 0 \\ \Rightarrow I &= \int_V d^3 r \cdot f [\vec{j} \vec{\nabla} g - \vec{j} \vec{\nabla} g] = 0.\end{aligned}$$

Für $f = 1, g = x_i$ wird das Integral I

$$I = \int_V d^3 r \left(j_k \frac{\partial}{\partial x_k} x_i \right) = \int_V d^3 r j_i(\vec{r}) = 0$$

\Rightarrow der Monopol verschwindet,

$$\frac{1}{c \cdot r} \int_V d^3 r' j_i(\vec{r}') \equiv 0.$$

Das **magnetische Moment** \vec{m} der Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ ist definiert als

$$\boxed{\vec{m} := \frac{1}{2c} \int_V d^3 r' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')]}$$

Durch mathematische Umformungen des Dipolanteils der Multipolentwicklung von $\vec{A}(\vec{r})$ lässt sich zeigen, dass gilt

$$\boxed{\vec{A}^{\text{Dipol}}(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}}$$

Die entsprechende Dipolnäherung des Magnetfeldes ist

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \stackrel{\text{Dipol}}{\cong} \vec{m} \left(\vec{\nabla} \frac{\vec{r}}{r^3} \right) - (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Es ist

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) &= \frac{(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) r^3 - \vec{r} (\vec{\nabla} r^3)}{r^6} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0, \\ (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{x_j}{r^3} &= \left(m_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \frac{x_j}{r^3} = m_i \left[\frac{r^3 \delta_{ij} - x_j 3r^2 \frac{x_i}{r}}{r^6} \right] = m_i \left(\frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3x_i x_j}{r^5} \right) \quad i, j = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Damit wird das magnetische Dipolfeld

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{m} \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5}}$$

wobei \vec{m} am Koordinatenursprung $\vec{r} = 0$ gemessen wird.

Für diskrete Ladungen $q_i(\vec{r}_i)$ mit Geschwindigkeiten \vec{v}_i ,

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

wird das magnetische Moment

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int_V d^3 r' \left[\vec{r}' \times \sum_{i=1}^N q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) \right] = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{2c} (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{2cm_i} \vec{L}_i$$

mit den Massen m_i (Impulsen $m_i \vec{v}_i$) und Drehimpulsen $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$. Für N gleiche Ladungen $q_i = q$ und $m_i = m$ folgt

$$\boxed{\vec{m} = \frac{q}{2mc} \cdot \vec{L}}$$

als Zusammenhang zwischen **magnetischem Moment** und **Drehimpuls**.

Beachte: Dieser Zusammenhang gilt für klassische Bahndrehimpulse \vec{L} .

Für **quantenmechanisch** beschreibbare Teilchen mit einem Eigendrehimpuls \vec{S} (Spin) gilt $\vec{m}_S = \frac{q}{2mc} \cdot g \cdot \vec{S}$ (Nachweis nur mit neutralen Atomen wie $^{47}\text{Ag}/5s$ Elektron möglich, da bei geladenen Teilchen die Lorentz-Kraft überwiegt) mit dem **Landé-Faktor** $g_e = 2$, der sich im Rahmen der Dirac-Theorie [3] berechnen lässt. In der Quantenelektrodynamik [4, 5] werden Korrekturen $g = 2(1 + \frac{\alpha}{2\pi} + \dots)$ abgeleitet, die sehr gut mit dem Experiment übereinstimmen. Für das Elektron ergibt sich beispielsweise $g_e \cong 2.002319\dots$.

3.6 Magnetisierung von Medien

In Medien können die Moleküle als Folge molekularer Ströme innere magnetische Momente $\vec{m}(\vec{r}_i)$ tragen, die – zusätzlich zum Beitrag aus der Stromdichte – das Vektorpotenzial $\vec{A}(\vec{r})$ beeinflussen:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \sum_{i=1}^N \frac{\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

(Beitrag des Mediums in Dipolnäherung s. Abschn. 3.5).

Analog zur Polarisation $\vec{P}(\vec{r})$ in der Elektrostatik bei Anlegen des \vec{E} -Feldes definieren wir die **Magnetisierung** $\vec{M}(\vec{r})$ als mittlere Dichte des magnetischen Moments \vec{m} ,

$$\vec{M}(\vec{r}) = \frac{\sum_i \vec{m}(\vec{r}_i)}{V},$$

und nach einer Mittelung über die $\vec{m}(\vec{r}_i)$ für den Übergang zu kontinuierlichen Medien wird das Vektorpotenzial

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r',$$

Analog zur Polarisationsladungsdichte ϱ_p in der Elektrostatik (mit $\varrho = \varrho_f + \varrho_p$) entspricht der Magnetisierung $\vec{M}(\vec{r})$ ein **Magnetisierungsstrom**

$$\vec{j}_M(\vec{r}) = c \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}),$$

und das Vektorpotenzial wird

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') + c \vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'.$$

Bildet man

$$\underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})}_{=\vec{B}} = \underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})}_{=0} - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A}$$

in Coulomb-Eichung

folgt mit der Gleichung für $\Delta \vec{A}$ von Abschn. 3.4 (analog zur Poisson-Gleichung)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \int_V [\vec{j}(\vec{r}') + \vec{j}_M(\vec{r}')] \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^3r' = \frac{4\pi}{c} [\vec{j}(\vec{r}) + \vec{j}_M(\vec{r})],$$

d. h., im magnetisierbaren Medium wird der **Gesamtstrom** einschließlich des Magnetisierungsstromes \vec{j}_M die Quelle des \vec{B} -Feldes.

In den Maxwell-Gleichungen (Abschn. 1.5) ist die **Rotation von \vec{H}** allein durch Ladungs- und Verschiebungsströme bestimmt,

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_q + \dot{\vec{D}},$$

im statischen Fall mit $\dot{\vec{D}} = 0, \vec{j} \equiv \vec{j}_q$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

d. h., der Magnetisierungsstrom spielt hier keine Rolle. Mit der Beziehung zwischen $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ und \vec{j}_m wird

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{H} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_m = \vec{\nabla} \times \vec{H} + 4\pi \vec{\nabla} \times \vec{M} \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}} \end{aligned}$$

analog zum elektrostatischen Resultat $\vec{E} = \vec{D} - 4\pi\vec{P}$. Mit der **Permeabilität** μ ist $\vec{B} = \mu\vec{H}$ (s. Abschn. 1.3), und die **magnetische Suszeptibilität** χ_M wird eingeführt als

$$\boxed{\vec{M} = \chi_M \cdot \vec{H}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \vec{H}(1 + 4\pi\chi_M), \quad \mu = 1 + 4\pi\chi_M}.$$

Es ist für

- Diamagnetika: $\mu < 1$, $\chi_M < 0$
- Paramagnetika: $\mu > 1$, $\chi_M > 0$; $\chi_M = \chi_M(T) \propto \frac{1}{T}$ (Curie'sches Gesetz für die Temperaturabhängigkeit).
- Ferromagnetika: $\mu \gg 1$, $\chi_M \approx \frac{\mu}{4\pi}$.

In **Diamagnetika** erzeugen äußere Felder Ströme, die erzeugte Magnetisierung schwächt das Feld, $\vec{M} \uparrow \vec{H}$. In **Paramagnetika** haben die Moleküle ein magnetisches Moment $\Rightarrow \vec{M}$ verstärkt das Feld.

Grenzflächen: Bedingungen an \vec{B} und \vec{H}

Analog zum elektrostatischen Fall bei $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$ gilt für die **Normalkomponente** von \vec{B} an Grenzflächen (Abb. 3.7) wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ stets

$$\boxed{B_{1n} - B_{2n} = 0}.$$

\Rightarrow Die Normalkomponente der magnetischen Induktion ist stetig an Grenzflächen.

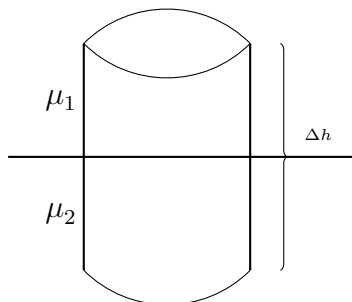


Abb. 3.7 Grenzfläche zwischen Magnetika

Für die **Tangentialkomponente** von \vec{H} (Abb. 3.8) gilt mit

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

und dem Flächenintegral $\int_F (\vec{\nabla} \times \vec{H}) d\vec{f} = \int_{\partial F} \vec{H} d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} \int_F \vec{j} d\vec{f} = \frac{4\pi}{c} I_s$.

⇒ Die Tangentialkomponente von \vec{H} springt an der Grenzfläche um den Betrag der Oberflächenströme I_s ,

$$\boxed{H_{1t} - H_{2t} = \frac{4\pi}{c} I_s} .$$

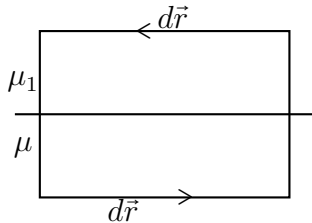


Abb. 3.8 Tangentialkomponente an der Grenzfläche

Beachte: In **Supraleitern** gibt es stets Oberflächenströme mit endlicher Eindringtiefe
 ⇒ $H_{1t} \neq H_{2t}$ für Supraleiter.

In **Leitern** kann $I_s = 0$ sein, so dass $H_{1t} = H_{2t}$ stetig an der Grenzfläche wird.

Die **Normalkomponente** von \vec{H} ist für $\mu_1 \neq \mu_2$ unstetig, $H_{1n} = (\mu_2/\mu_1)H_{2n}$.

3.7 Energie und Kraft im magnetischen Feld

Analog zur Elektrostatik [dort $U = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{D}(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})$] ist die **magnetostatische Energie** in Materie

$$\boxed{U_m = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{B}(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r})} , \quad \vec{B} = \mu \vec{H} .$$

Für die Kraftdichte der Lorentz²⁷-Kraft findet man empirisch

$$\boxed{\vec{f} = \rho \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) = \rho \vec{E} + \frac{\vec{j}}{c} \times \vec{B}} .$$

Da $\frac{v}{c} \ll 1$ ist die magnetische Kraft i. Allg. klein gegen die elektrische. Das Volumenintegral ergibt die magnetische Kraft

$$\boxed{\vec{F}_m = \frac{1}{c} \int_V d^3r [\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})]} .$$

Für eine geschlossene dünne Leiterschleife mit Stromstärke I wird das

$$\vec{F}_m = \frac{I}{c} \int [d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})] .$$

²⁷Hendrik Antoon Lorentz (*1853 Arnhem, †1928 Haarlem), niederländischer Mathematiker und Physiker.

Die Kraft eines Stromkreises (1) auf einen Stromkreis (2) ist

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{c} \int d^3r \vec{j}_2(\vec{r}) \times \vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{1}{c^2} \int d^3r \int d^3r' [\vec{j}_1(\vec{r}') \vec{j}_2(\vec{r})] \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Herleitung von \vec{F}_2 :

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= \frac{1}{c} \int d^3r \vec{j}_2(\vec{r}) \times \vec{B}_1(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{c^2} \int d^3r \int d^3r' \underbrace{\vec{j}_2(\vec{r})}_{\vec{a}} \times \left[\underbrace{\left(\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)}_{\vec{b}} \times \underbrace{\vec{j}_1(\vec{r}')}_{\vec{c}} \right] \end{aligned}$$

mit $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{F}_2 &= \frac{1}{c^2} \int d^3r \int d^3r' [\vec{j}_1(\vec{r}') \vec{j}_2(\vec{r})] \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &\quad - \frac{1}{c^2} \int d^3r \int d^3r' \left[\left(\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \vec{j}_2(\vec{r}) \right] \vec{j}_1(\vec{r}'), \end{aligned}$$

und mit Anwendung des Gauß'schen Satzes folgt wegen des verschwindenden Flächenintegrals

$$\begin{aligned} \int d^3r \left(\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \vec{j}_2(\vec{r}) &= - \int d^3r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla} \vec{j}_2(\vec{r}) = 0, \quad \text{wegen } \vec{\nabla} \vec{j}_2(\vec{r}) = 0 \\ \Rightarrow \vec{F}_2 &= \frac{1}{c^2} \int d^3r \int d^3r' [\vec{j}_1(\vec{r}') \vec{j}_2(\vec{r})] \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \end{aligned}$$

Literatur

- [1] Ampère, A. M.: Recueil d'observations électro-dynamiques. Chez Crochard, Cloître Saint-Benoît (1822)
- [2] Aharonov, Y., Bohm, D.: Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory. The Physical Review 115, 485 (1959)
- [3] Dirac, P. A. M.: The quantum theory of the electron. Proc. Roy. Soc. A117, 610 (1928)
- [4] Schwinger, J.: On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron. Phys. Rev. 73, 416L (1948)
- [5] Itzykson, C., Zuber, J.-B.: Quantum Field Theory. McGraw Hill, New York (1980)

4 Spezielle Relativitätstheorie

4.1 Einführung und Lorentz-Transformation

- Die Elektrodynamik ist das erste Beispiel einer klassischen Feldtheorie, in der Newtons Konzept der instantanen Fernwirkung aufgegeben wird: Die Kräfte breiten sich mit endlicher Geschwindigkeit – der Lichtgeschwindigkeit – aus, die Elektrodynamik ist eine Nahwirkungstheorie.
- Das Prinzip von der **Konstanz der Lichtgeschwindigkeit c** hat A. Einstein 1905 seiner speziellen Relativitätstheorie zugrunde gelegt, in der Arbeit *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* [1].
- Damit die Lichtgeschwindigkeit für alle Beobachter gleich ist, muss die klassische Vorstellung der Verknüpfung von Raum- und Zeitkoordinaten in der **Galilei-Transformation** durch die **Lorentz-Transformation** ersetzt werden.
- Nur die Gleichungen der Newton'schen Mechanik sind invariant bei **Galilei-Transformation**, insbesondere

$$t' = t, \quad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - vt,$$

die Maxwell-Gleichungen sind das nicht, denn das Licht müsste sich in einem bewegten Inertialsystem mit einer Geschwindigkeit ausbreiten, die von der Richtung abhängt.

- Der Widerspruch zwischen klassischer Mechanik und Elektrodynamik wird aufgehoben, wenn wir die Galilei-Transformation durch die **Lorentz-Transformation** ersetzen: Sie vermittelt zwischen zwei Systemen (\vec{x}, t) und (\vec{x}', t') , die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit entlang ihrer gemeinsamen Achse (z. B. $z \equiv x^3$ -Achse) bewegen (Abb. 4.1).

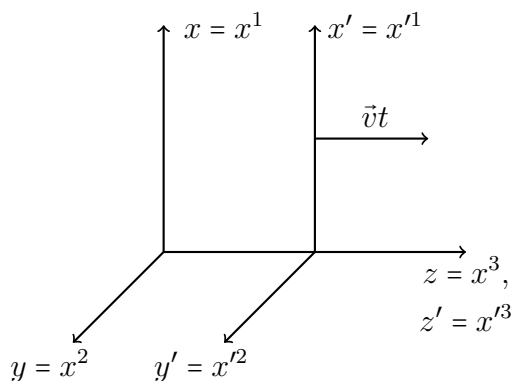


Abb. 4.1 Relativbewegung zweier Inertialsysteme

Mathematisch beschreiben wir einen solchen **Lorentz-Boost** in z -Richtung durch die in Abschn. 4.3 genauer diskutierte Transformationsmatrix $\Lambda(\beta)$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \Lambda(\beta) \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

mit der Geschwindigkeit in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit $\beta = v/c$,

$$\Lambda(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

und dem Lorentz-Faktor

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \geq 1.$$

- Die Transformation der Zeit (Relativität der Zeit, Abhängigkeit vom Bezugssystem) ist berücksichtigt.
- Die Maxwell-Gleichungen sind invariant gegenüber Lorentz-Transformation (LT).

Im Fall nur einer Raumdimension und eines Lorentz-Boosts in Richtung x wird die Lorentz-Transformation

$$\Lambda^{(1)}(\beta) = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \Lambda^{(1)}(\beta) \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}.$$

Aus der LT folgen charakteristische (messbare) Eigenschaften der Minkowski-Welt, insbesondere die **Zeitdilatation**.

Haben zwei Ereignisse am Ort $\vec{x} = (0, 0, 0)$ im ungestrichenen System S den Zeitabstand x^0 ,

$$S : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

so werden sie im gestrichenen System S' bei Anwendung der LT mit $\Lambda(\beta)$ zu

$$S' : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma x^0 \\ 0 \\ 0 \\ -\beta\gamma x^0 \end{pmatrix}.$$

und der in dieser Zeit im Mittel zurückgelegte Weg

$$\bar{d}' = v \cdot \tau' \simeq 0,9983 \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 37,42 \cdot 10^{-6} \text{ s} \simeq 11,21 \cdot 10^3 \text{ m} \simeq 11,2 \text{ km}.$$

⇒ Die Myonen können die Erdoberfläche in der mittleren Lebensdauer – **als Folge der Zeitdilatation** – erreichen. In Beschleunigerexperimenten mit Myonen [3] konnte die Zeitdilatation mit sehr hoher Genauigkeit (2014: $\pm 2,3 \cdot 10^{-9}$ [4]) nachgewiesen werden.

Längenkontraktion (Lorentz-Kontraktion)

Betrachte einen Einheitsmaßstab in Bewegungsrichtung im System S zur Zeit $t = 0$, begrenzt durch die Vierervektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beobachte den Maßstab zum festen Zeitpunkt $x'^0 = 0$ im System S' . Die LT ergibt

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma x^0 - \beta \gamma x^3 \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow x^0 &= \beta x^3 = \beta \quad \text{als entsprechender Zeitpunkt im System } S. \end{aligned}$$

Damit wird die Länge des Maßstabes im (bewegten) System S' mit $x^3 \equiv 1$:

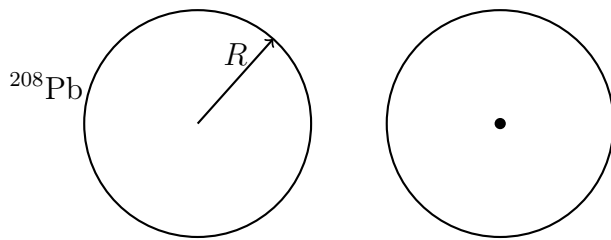
$$x'^3 = -\beta \gamma x^0 + \gamma x^3 = \gamma(1 - \beta^2) = \sqrt{1 - \beta^2} < 1.$$

⇒ Bewegte Maßstäbe erscheinen verkürzt.

Wie die Zeitdilatation ist die **Längenkontraktion** ein physikalisch realer Effekt mit messbaren Konsequenzen.

Beispiel

Kollision zweier Bleionen (Abb. 4.2) im Large Hadron Collider LHC mit einer Energie von $E = 2,76 \cdot 10^{12} \text{ eV}$ (2,76 TeV) pro Teilchenpaar (insgesamt 208 Teilchenpaare, 82 Protonen- und 126 Neutronenpaare). Entsprechende Experimente sind am Large Hadron Collider LHC des europäischen Forschungszentrums CERN in Genf bereits durchgeführt worden [5], später (Ende 2015) gefolgt von Messungen bei der höheren Energie von 5,02 TeV. Im **Ruhsystem** S sind die Kerne sphärisch mit Radius $R = 1,2 \cdot A^{1/3} \text{ fm} \simeq 7,1 \text{ fm}$. Im **bewegten System** S' sind die Ionen Lorentz-kontrahiert (Abb. 4.3).

Abb. 4.2 Zwei Bleiionen im Ruhesystem S

Der Impuls p jedes Hadrons im Collider ist $p = 3,5 \cdot Z/A \text{ TeV}/c = 1,38 \text{ TeV}/c$; die relativistische Energie ist dann $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ mit der Protonenmasse $m_p = 0,938 \text{ GeV}/c^2$, $E = \sqrt{1,904 + 0,9 \cdot 10^{-6}} \text{ TeV} \simeq 1,380\,000\,3 \text{ TeV} \Rightarrow \beta = pc/E \simeq 0,999\,999\,8$

\Rightarrow Verkürzter Ionenradius **in Bewegungsrichtung**

$$R' = R \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = 7,1 \text{ fm} \cdot 6,8 \cdot 10^{-4} \simeq 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ fm}$$

\Rightarrow Bei der Kollision treffen zwei kreisförmige Scheiben aufeinander, die bei sehr hohen Energien wie am LHC (nahezu) transparent sind und einander durchdringen (Abb. 4.3).

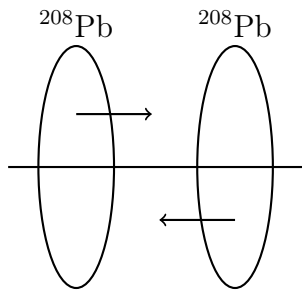


Abb. 4.3 Längenkontraktion der Ionen im Collider

Im Volumen zwischen den sich entfernenden Scheiben [6] werden aus der relativistischen Energie **neue Teilchen** erzeugt; $\geq 20\,000$ geladene Hadronen in einer zentralen PbPb-Reaktion bei $E = 5 \text{ TeV}$ pro Teilchenpaar [7].

Anders als **Zeitdilatation** und **Längenkontraktion** ergibt sich die **scheinbare Massenzunahme** eines bewegten Körpers nicht unmittelbar aus der LT – ihre Ursache ist vielmehr das Massenäquivalent der kinetischen Energie, das für einen Körper mit Ruhemasse m eine transversale oder relativistische Masse m' ergibt,

$$m' = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}} > m \quad \text{für } v > 0.$$

Infolge der Zeitabhängigkeit der Masse wird die **Kraft** bei beschleunigter Bewegung

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m'\vec{v})}{dt} = \frac{dm'}{dt}\vec{v} + m'\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm'}{dt}\vec{v} + m'\vec{a}.$$

Durch den zusätzlichen Term $\frac{dm'}{dt}\vec{v}$ vergrößert sich bei gegebener Beschleunigung \vec{a} die Kraft: Der Körper bewegt sich so, als hätte er eine größere Masse.

Mit $m' = \gamma m$ wird $F = |\vec{F}'|$

$$\begin{aligned} F &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) v + \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dv}{dt} \\ &= \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{m}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \left(-2 \frac{v}{c^2} \right) \frac{dv}{dt} \cdot v + \frac{m}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \frac{dv}{dt} \\ &\Rightarrow F = \frac{m}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

Der Körper verhält sich, als hätte er die Masse $M = m/(1-\beta^2)^{3/2} = \gamma^3 m$ – in Übereinstimmung mit den experimentellen Befunden an **Teilchenbeschleunigern**.

Historischer Einschub

Anders als Einstein hatte Maxwell keinen Widerspruch zwischen Newton'scher Mechanik und Elektrodynamik gesehen, denn er war von der Existenz eines absolut ruhenden Äthers überzeugt, den **Fresnel**²⁸ 1816 eingeführt hatte [2]: Demnach gäbe es ein ausgezeichnetes Bezugssystem, in dem die Maxwell-Gleichungen gelten.

Maxwell: Es kann keinen Zweifel geben, dass der interplanetarische und interstellare Raum nicht leer ist, sondern erfüllt mit einer materiellen Substanz oder einem Körper, der sicher der größte und wahrscheinlich der homogenste ist, den wir kennen.

Demnach bewegt sich die Erde durch den Äther (Abb. 4.4), und das Licht sollte unterschiedliche Zeiten benötigen, um die gleiche Entfernung **parallel** oder **senkrecht** zur Erdbewegung zurückzulegen.

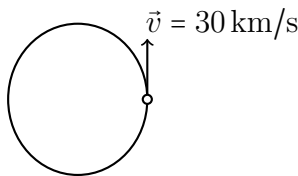


Abb. 4.4 Erdbewegung durch den 'Äther'

⇒ Auf einer Strecke von 1 m wird ein Zeitunterschied entsprechend 1/40 der Wellenlänge von gelbem Licht erwartet.

²⁸ Augustin Jean Fresnel (*1788 Broglie, †1827 Ville-d'Avray bei Paris), französischer Physiker und Ingenieur.

- ⇒ Vorschlag zur Messung: **Michelson**²⁹, 1881, aus der Interferenz von orthogonalen und parallelen Strahlen (Abb. 4.5). Die bei M_1 (halbdurchlässiger Spiegel) geteilten Strahlen werden bei M_2, M_3 reflektiert und in M_1 wieder zusammengeführt ⇒ konstruktive Interferenz am Schirm.
- ⇒ Infolge der Erdbewegung durch den ‘Äther’ müssten bei Galilei-Invarianz die Lichtlaufzeiten parallel (Abb. 4.6) und senkrecht (Abb. 4.7) zur Bewegungsrichtung verschieden sein. Maxwell war noch der Meinung gewesen, dass terrestrische Messungen nicht die notwendige Genauigkeit erreichen können, aber Michelson [10] konnte zeigen, dass die Präzision der interferometrischen Methode ausreicht, um die erwartete Verschiebung des Lichtbündels in Richtung der Erdbewegung zu messen. Durch die Erdrotation ändern sich die relativen Laufzeiten der beiden Strahlenbündel. Messungen im Abstand von sechs Stunden (Drehung um 90° infolge der Erdrotation) ließen eine maximale Verschiebung des Interferenzmusters erwarten: Eine Änderung der Lichtlaufzeiten würde das Interferenzmuster beeinflussen, auch bei kleiner ‘Äthergeschwindigkeit’ $v \ll c$.

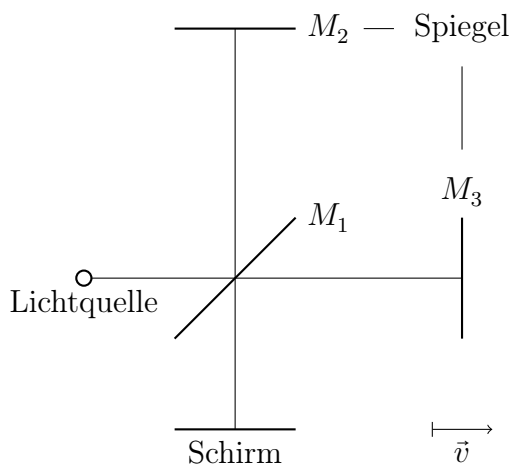


Abb. 4.5 Das Michelson-Morley-Experiment (1881 Potsdam, 1887 Cleveland)

Die Messungen von **Michelson 1881** [10] und **Michelson and Morley**³⁰ 1887 [11] ergaben jedoch keinen messbaren Effekt. Das wichtigste Experiment mit negativem Ausgang in der Geschichte der Wissenschaft hatte gezeigt:

⇒ **Das Licht bewegt sich stets mit der Geschwindigkeit c relativ zur Lichtquelle und zum Spiegel.** Moderne Experimente bestätigen das Resultat mit stark verbesserter Genauigkeit [12].

Lichtlaufzeit im MM-Experiment bei Annahme der Galilei-Invarianz

²⁹Albert Abraham Michelson (*1852 Strelno, †1931 Pasadena, Kalifornien), US-amerikanischer Physiker deutscher Herkunft.

³⁰Edward Williams Morley (*1838 Newark, †1923 West Hartford), US-amerikanischer Chemiker.

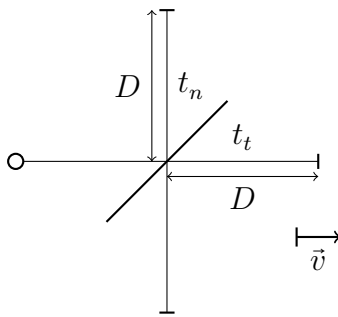


Abb. 4.6 Tangentiale Lichtlaufzeit

$$\Rightarrow t_t = \frac{D}{c-v} + \frac{D}{c+v} = \frac{2D}{c} \frac{1}{(1-v^2/c^2)}$$

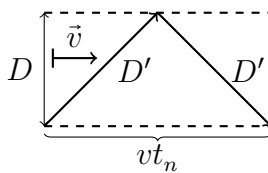


Abb. 4.7 Normale Lichtlaufzeit

Relativ zu einem ruhenden Beobachter legt das Licht die Strecke $2D'$ zurück,

$$\begin{aligned} \Rightarrow t_n &= \frac{2D'}{c} \Rightarrow D' = \frac{ct_n}{2}; D'^2 = D^2 + \left(\frac{vt_n}{2}\right)^2 \\ t_n &= \frac{2D}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \\ t_t - t_n &= \frac{2D}{c} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \right] \stackrel{1.\text{Ordnung}}{\simeq} \frac{Dv^2}{c^3}. \end{aligned}$$

Mit $D = 1 \text{ m}$, $v = 30 \text{ km/s}$, $\beta \simeq 10^{-4}$ wird $\Delta t = t_t - t_n \simeq \frac{D \cdot 10^{-8}}{c} \simeq 3,3 \cdot 10^{-17} \text{ s}$.

In dieser Zeit legt das Licht $\simeq 1/40$ seiner Wellenlänge zurück – was interferometrisch messbar ist.

Das Nullresultat von Michelson und Morley veranlasste Fitzgerald [8] und später Lorentz [9] zu der Hypothese einer Längenkontraktion in Bewegungsrichtung, um $t_t \equiv t_n$ (unter Galilei-Transformation!) zu erzwingen:

$$l'_t = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \left(\text{vorher Fitzgerald: } l_t = l \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right), \text{ d. h. 1. Ordnung} \right),$$

so dass sich die Laufzeit (Abb. 4.6, 4.7) entsprechend verringert zu

$$t'_t = \frac{2D}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \stackrel{\text{bei Galilei-Invarianz}}{=} t_n$$

(mit $t_t = \frac{D}{c-v} + \frac{D}{c+v} = \frac{2D}{c} \cdot \frac{1}{1-v^2/c^2}$), in Übereinstimmung mit dem MM-Experiment ($t_n =$ Laufzeit \perp Bewegungsrichtung).

Der Ausdruck für die Längenkontraktion ist **formal identisch** mit dem aus der speziellen Relativitätstheorie (SRT) – dort folgt er jedoch aus dem Postulat der konstanten Lichtgeschwindigkeit und der LT für die Transformation der Bezugssysteme, es wird in der speziellen Relativitätstheorie kein Äther benötigt.

4.2 Notation im Minkowski-Raum

Koordinaten: Ein Raum-Zeit-Punkt (x^0, x^1, x^2, x^3) wird durch die Zeitkoordinate $x^0 = ct$ und die Raumkoordinaten $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ definiert.

Indizes:

- $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ kennzeichnen Komponenten von Vierervektoren
- $i, k, \dots = 1, 2, 3$ Komponenten von Dreiervektoren im gewöhnlichen Raum

$$(x^\mu) = (x^0, x^k) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Die **Metrik** im Raum-Zeit-Kontinuum ist durch den metrischen Tensor definiert,

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d. h.: $g_{00} = 1; g_{kk} = -1; g_{\mu\nu} = 0 \forall \mu \neq \nu$

Man unterscheidet sogenannte

- kovariante Vierervektoren a_μ : transformieren wie $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$,
- kontravariante Vierervektoren a^μ ($\hat{=}$ zu a_μ duale Vierervektoren): transformieren wie x^μ .

Umwandlung von kontra- in kovariante Vierervektoren durch Anwendung des metrischen Tensors,

$$x_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} x^\nu \Rightarrow x_0 = x^0, x_k = -x^k .$$

Summenkonvention: Über doppelt erscheinende Indizes wird summiert, $x_\mu \equiv g_{\mu\nu}x^\nu$.
Hinaufziehen der Indices via $x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu$ ($g_{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu}$).

$$\text{Es ist } g_\mu{}^\nu = g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} = \delta_\mu{}^\nu = g^\mu{}_\nu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}$$

Dreier- und Vierervektoren, Skalarprodukt

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^0, \vec{x})$$

Skalarprodukt Dreiervektoren:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$$

Norm Dreiervektor (Betrag)

$$x \equiv |\vec{x}| = (\vec{x} \cdot \vec{x})^{1/2} = [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{1/2}$$

(Wenn eine Verwechslung mit dem Betrag des Dreiervektors ausgeschlossen ist, wird der Index μ beim Vierervektor oft weggelassen, $x^\mu \rightarrow x$.)

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt der Vierervektoren x^μ, y^μ entsteht durch Verjüngung aus den jeweiligen ko- und kontravarianten Komponenten; es ist nicht mehr positiv-semidefinit:

$$x_\mu y^\mu = x^\mu y_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu y^\mu = x^0y^0 - \vec{x}\vec{y}$$

Norm

Die Norm eines Vierervektors x^μ ist

$$x_\mu x^\mu = (x^0)^2 - \vec{x}^2 \equiv g_{\mu\nu}x^\nu x^\mu$$

Klassifizierung der Vierervektoren nach ihrer Norm: Je nach Vorzeichen der Norm gibt es drei Arten von Vierervektoren (Abb. 4.8):

$$x_\mu x^\mu < 0, \quad x^\mu \text{ raumartig}$$

$$x_\mu x^\mu = 0, \quad x^\mu \text{ Nullvektor (lichtartig)}$$

$$x_\mu x^\mu > 0, \quad x^\mu \text{ zeitartig}$$

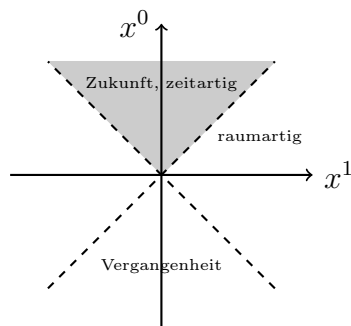


Abb. 4.8 Minkowski-Diagramm

Differenzialoperatoren im Minkowski-Raum

In 3d:

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

In 4d: Die vier partiellen Differenzialoperatoren $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ bilden einen kovarianten Vierervektor.

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \vec{\nabla} \right), \text{ Gradientenoperator}$$

der entsprechende kontravariante Gradient ist

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, -\vec{\nabla} \right).$$

Der **d'Alembert³¹-Operator** (engl. box operator) ist

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \partial_\mu \partial^\mu = g_{\mu\nu} \partial^\nu \partial^\mu.$$

Transformationseigenschaften der Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x^\nu}$:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}}_{\Lambda_\mu{}^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad \text{mit: } \Lambda_\mu{}^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$$

⇒ die Ableitung transformiert sich wie x_μ ,

$$x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu, \quad \text{deshalb} \quad \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \equiv \partial_\mu, \quad (\partial_\mu) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, +\vec{\nabla} \right).$$

³¹Jean-Baptiste le Rond, genannt D'Alembert, (*1717 Paris, †1783 Paris), französischer Mathematiker und Physiker.

4.3 Viererpotenzial, Relativitätsprinzip

In $4d$ werden skalares Potenzial Φ und Vektorpotenzial \vec{A} zum Viererpotenzial zusammengefasst,

$$(A^\mu) := (\Phi, \vec{A})$$

und die Potenzialgleichung wird in der Lorenz-Eichung zu

$$\square A^\mu = +\frac{4\pi}{c} j^\mu$$

mit der Viererstromdichte $(j^\mu) := (c \cdot \varrho, \vec{j})$; $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$.

Das **Relativitätsprinzip** fordert, dass die Naturgesetze in allen Inertialsystemen gleich sind: Es gibt kein ausgezeichnetes, absolutes Bezugssystem. Dem entspricht die Forderung der Invarianz des d'Alembert-Operators

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu = \partial_\mu g^{\mu\nu} \partial_\nu$$

gegenüber Lorentz-Transformation, mit dem metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$. Daraus folgt für die Transformationseigenschaft von $g^{\mu\nu}$

$$\Lambda^\lambda{}_\mu g^{\mu\nu} \Lambda^e{}_\nu = g^{\lambda e}$$

oder in Matrixform

$$\Lambda g \Lambda^T = g,$$

d. h., auch der metrische Tensor ist Lorentz-invariant.

Beweis der Invarianz, in Komponenten:

Es ist

$$\begin{aligned} \partial_\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} = \Lambda^\lambda{}_\mu \partial'_\lambda \\ \Rightarrow \partial_\mu g^{\mu\nu} \partial_\nu &= \Lambda^\lambda{}_\mu \partial'_\lambda g^{\mu\nu} \Lambda^e{}_\nu \partial'_e \stackrel{!}{=} \partial'_\lambda g^{\lambda e} \partial'_e \end{aligned}$$

(es wird über gleiche Indizes auf verschiedenen Ebenen summiert)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Lambda^\lambda{}_\mu g^{\mu\nu} \Lambda^e{}_\nu &= g^{\lambda e} \\ &\stackrel{\hat{=}}{=} \Lambda g \Lambda^T = g \quad \text{mit} \quad \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} = \Lambda^\lambda{}_\mu. \end{aligned}$$

Daraus folgt $(\det \Lambda)^2 = 1 \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1$. Für das Matrixelement $\lambda = 0, \rho = 0$ gilt

$$\Lambda^0_{\mu} g^{\mu\nu} \Lambda^0_{\nu} = 1 = (\Lambda^0_0)^2 - \sum_k (\Lambda^0_k)^2$$

$$\Rightarrow \Lambda^0_0 \geq 1 \vee \Lambda^0_0 \leq -1.$$

Das Vorzeichen der Determinante von Λ und das von Λ^0_0 verwendet man dementsprechend zur Klassifizierung der Elemente der Lorentz-Gruppe:

	$\det \Lambda$	$\text{sgn} \Lambda^0_0$	
eigentlich orthochron	1	1	} eigentliche LT
Raum-Zeit-spiegelungsartig	1	-1	
uneigentlich orthochron	-1	1	} uneigentliche LT
zeitspiegelungsartig	-1	-1	

Aus $\det \Lambda = 1$ folgt insbesondere, dass das vierdimensionale Raum-Zeit-Volumen invariant unter LT ist:

$$dt' d^3 r' = \frac{1}{c} d^4 x' = \frac{1}{c} \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} d^4 x = \frac{1}{c} \det(\Lambda) d^4 x = \frac{1}{c} d^4 x = dt d^3 r.$$

Legen wir $x^3 = z$ und $x'^3 = z'$ in Richtung der Relativgeschwindigkeit \vec{v} der sich gegeneinander bewegendenden Inertialsysteme und setzen $x'^1 = x^1, x'^2 = x^2$ (keine Relativgeschwindigkeit \perp zu x^3), folgt die zu Beginn von Abschn. 4.1 genannte **spezielle LT** mit

$$x'^3 = \frac{x^3 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - vx^3/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

und der zugehörigen Matrix

$$(\Lambda^{\mu}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

In einem homogenen Raum-Zeit-Kontinuum ist die Transformation $x' \leftrightarrow x$ **stets linear**

$$\boxed{x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}}$$

Λ ist reell, $\Lambda^*_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu\nu}$, und erhält das Abstandskadrat, $\Lambda_{\mu\nu} \Lambda^{\mu\lambda} = \Lambda_{\nu\mu} \Lambda^{\lambda\mu} = \delta_{\nu}^{\lambda}$.

Invarianz des Skalarproduktes

Ist der Raum isotrop und kein Inertialsystem ausgezeichnet, muss das Skalarprodukt zweier Vierervektoren **invariant bei LT** sein:

$$s'^2 = x'^{\mu} x'_{\mu} = s^2 = x^{\mu} x_{\mu}$$

$$s'^2 = x'^{\mu} x'_{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \Lambda_{\mu}^{\kappa} x_{\kappa} = s^2 = x^{\nu} \delta_{\nu}^{\kappa} x_{\kappa}.$$

dies ist für beliebiges x erfüllt für

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda_{\mu}^{\kappa} = \delta_{\nu}^{\kappa}.$$

Die Umkehrtransformation wird

$$x^{\kappa} = \delta_{\nu}^{\kappa} x^{\nu} = \Lambda_{\mu}^{\kappa} \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = \Lambda_{\mu}^{\kappa} x'^{\mu}.$$

Für die vorher verwendete **spezielle LT** lässt sich die Invarianz des Skalarproduktes direkt zeigen:

$$\begin{aligned} s^2 &= x^{\mu} x_{\mu} = c^2 t^2 - \vec{r}^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \\ s'^2 &= x'^{\mu} x'_{\mu} = c^2 t'^2 - \vec{r}'^2 = x_0'^2 - x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2 \\ &= (\gamma x_0 - \beta \gamma x_3)^2 - x_1^2 - x_2^2 - (-\beta \gamma x_0 + \gamma x_3)^2 \\ &= x_0^2 \underbrace{(\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2)}_{=1} + \underbrace{(-2\beta \gamma^2 x_0 x_3 + 2\beta \gamma^2 x_0 x_3)}_{=0} - x_3^2 \underbrace{(-\beta^2 \gamma^2 + \gamma^2)}_{=1} - x_1^2 - x_2^2 \\ &= x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = s^2. \end{aligned}$$

Raumartiger Abstand

Für $s^2 < 0$ gibt es Inertialsysteme, in denen die Ereignisse **gleichzeitig** stattfinden:
 $t' = x'^0 = 0$

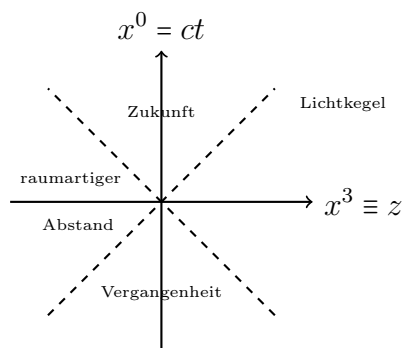


Abb. 4.9 Raumartig zueinander gelegene Ereignisse

Sei $(x)^\mu = (ct, 0, 0, z) \Rightarrow s^2 = c^2t^2 - z^2$, und für (x'^μ) seien $t' = \gamma \cdot (t - \frac{vz}{c^2})$, $z' = \gamma(z - vt)$.
Für $v = \frac{tc^2}{z}$ ist $v^2 = \frac{t^2c^4}{z^2}$, $\frac{v^2}{c^2} = \frac{t^2c^2}{z^2}$,

$$\Rightarrow t' = 0,$$

$$\begin{aligned} z' &= \gamma \cdot z(1 - vt/z) = \gamma \cdot z(1 - v^2/c^2) \\ &= z\sqrt{1 - v^2/c^2} = \pm\sqrt{z^2 - c^2t^2} = \pm\sqrt{-s^2}. \end{aligned}$$

Man bezeichnet dann die Ereignisse $(x^\mu), (x'^\mu)$ als **raumartig** zueinander gelegen: Sie sind so weit entfernt, dass das Licht die Strecke in dieser Zeit nicht überbrücken kann.

Zeitartiger Abstand

Für $s^2 > 0$ gibt es Inertialsysteme, in denen zwei Ereignisse am gleichen Ort stattfinden

$$\vec{x}' = 0; \quad (x^\mu) = (ct, 0, 0, z), \quad s^2 = c^2t^2 - z^2.$$

Für $v = \frac{z}{t}$ ist $v^2 = \frac{z^2}{t^2}$, $\frac{v^2}{c^2} = \frac{z^2}{c^2t^2}$; $z' = \gamma(z - vt) = 0$

$$\Rightarrow t' = \gamma \left(t - \frac{vz}{c^2} \right) = \gamma t \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \text{sgn}(t)\sqrt{t^2 - \frac{z^2}{c^2}} = \text{sgn}(t) \cdot \frac{s}{c}.$$

d. h., das Vorzeichen von t' stimmt mit dem von t überein. Im Ruhesystem gilt dann (ungestrichenes System)

$$\frac{1}{c} \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Eigenzeit τ

Die Zeit, die im jeweiligen Ruhesystem verstreicht, ist die **Eigenzeit**. Für einen mit $\vec{v}(t)$ bewegten Punkt ist $d\tau = ds/c = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$

$$\Rightarrow \tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma.$$

Lichtartiger Abstand

Ausbreitung eines Lichtblitzes **auf dem Lichtkegel** von einem Ereignis zum anderen mit $s^2 = 0$. Die zeitliche Reihenfolge der Ereignisse ändert sich dabei nicht.

Additionstheorem für Geschwindigkeiten

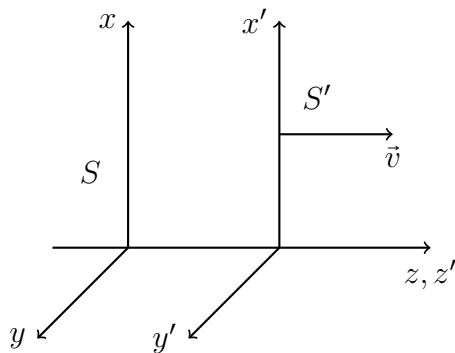


Abb. 4.10 Addition relativistischer Geschwindigkeiten

In S' bewege sich ein Punkt mit der Geschwindigkeit w' in z -Richtung. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt er sich in S (Abb. 4.10)?

$$z = \gamma(z' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{vz'}{c^2}\right),$$

Umkehrtransformation mit $z' = w't'$:

$$z = \gamma(v + w')t', \quad t = \gamma\left(1 + \frac{vw'}{c^2}\right)t'.$$

⇒ Geschwindigkeit des Punktes in S :

$$w = \frac{z}{t} = \frac{w' + v}{1 + \frac{w'v}{c^2}}$$

Beispiele:

1. $w' = v = 0,5c$: $w = \frac{c}{1+0,25} = 0,8c$
2. $w' = v = c$: $w = \frac{2c}{1+c^2/c^2} = c$, c ist Grenzgeschwindigkeit
3. $w' = c$, $v = 0,5c$: $w = \frac{c+0,5c}{1+0,5} = c$

Dies entspricht Einstein's Diktum, dass *die Lichtgeschwindigkeit durch Zusammensetzung mit einer 'Unterlichtgeschwindigkeit' nicht geändert werden kann* [1].

4.4 Vierergeschwindigkeit und Viererimpuls, Invarianten

Da die Zeit vom Bezugssystem abhängt – nicht mehr invariant ist –, wird im Minkowski-Raum die Bedeutung der Geschwindigkeit (**Vierergeschwindigkeit**) verändert: Sie ist

die Ableitung der vierdimensionalen Raum-Zeit-Koordinaten nach der invarianten **Eigenzeit** τ (s. Abschn. 4.3), mit $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$, $x^0 = ct$:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \begin{pmatrix} \frac{cdt}{d\tau} \\ \frac{d\vec{x}}{d\tau} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}, \text{ analog Viererbeschleunigung } a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}.$$

Das (invariante) Quadrat von u^μ wird

$$u^2 = u_\mu u^\mu = \gamma^2 (c^2 - \vec{v}^2) = \gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2.$$

Analog wird der **Viererimpuls**

$$p^\mu = m u^\mu = m \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}.$$

Im **nichtrelativistischen Grenzfall** $v \ll c$ gehen diese Ausdrücke in die gewöhnlichen Formeln für Energie und Impuls über, jedoch muss die **Ruheenergie** berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \xrightarrow{v \ll c} 1 + \frac{1}{2}\beta^2 \mp \dots = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \mp \dots \\ \Rightarrow p^0 &= m \gamma \cdot c = \frac{E}{c} \rightarrow \frac{1}{c} (m c^2 + \frac{1}{2} m v^2) \end{aligned}$$

d. h. $m c^2 \hat{=}$ Ruheenergie, $\frac{1}{2} m v^2$ kinetische Energie in nichtrelativistischer Näherung sowie $\vec{p} \rightarrow m \vec{v}$ für den Dreierimpuls.

Das invariante Skalarprodukt für den Viererimpuls wird

$$\begin{aligned} p_\mu p^\mu &= \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \quad (p_\mu p^\mu = p^\mu p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu p^\mu) \\ \Rightarrow & \boxed{E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \end{aligned}$$

als relativistische Energie-Impuls-Beziehung, die wir in Abschn. 4.1 bereits benutzt haben.

Anwendung im Teilchenzerfall

Beispiel: $\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p$; u, d, s = up-, down-, strange-Quarks, \bar{u} = anti-up-Quark

$$\Lambda^0 = uds, \quad m_{\Lambda^0} = 1,115 \text{ GeV}/c^2 \simeq 2182 m_e$$

$$\pi^- = \bar{u}d, \quad m_{\pi^-} = 139,6 \text{ MeV}/c^2 \simeq 273 m_e$$

$$p = uud, \quad m_p = 938,3 \text{ MeV}/c^2 \simeq 1836 m_e$$

Energie-Impuls-Bilanz bei ruhendem Λ^0 vor dem Zerfall:

$$m_\Lambda c^2 = \sqrt{m_\pi^2 c^4 + \vec{p}_\pi^2 c^2} + \sqrt{m_p^2 c^4 + \vec{p}_p^2 c^2}$$

$$0 = \vec{p}_\pi + \vec{p}_p$$

bzw. Gleichung für die Viererimpulse:

$$\boxed{p_\Lambda^\mu = p_\pi^\mu + p_p^\mu} \quad \text{Viererimpulserhaltung.}$$

Auflösen nach p_p und quadrieren ergibt:

$$p_p^\mu p_{p\mu} = (p_\Lambda^\mu - p_\pi^\mu)(p_{\Lambda\mu} - p_{\pi\mu}) = m_p^2 c^2 = p_\Lambda^\mu p_{\Lambda\mu} + p_\pi^\mu p_{\pi\mu} - 2p_\Lambda^\mu p_{\pi\mu}$$

mit $2p_\Lambda^\mu p_{\pi\mu} = 2 \cdot (m_\Lambda c, 0) \begin{pmatrix} E_\pi/c \\ -\vec{p}_\pi \end{pmatrix} = 2m_\Lambda E_\pi$ folgt

$$m_p^2 c^2 = m_\Lambda^2 c^2 + m_\pi^2 c^2 - 2m_\Lambda E_\pi$$

$$\boxed{E_\pi = \frac{c^2}{2m_\Lambda} (m_\Lambda^2 + m_\pi^2 - m_p^2)}$$

und analog $E_p = \frac{c^2}{2m_\Lambda} (m_\Lambda^2 - m_\pi^2 + m_p^2)$.

Aus der Erhaltung des Viererimpulses lassen sich die relativistischen Gesamtenergien der beim Zerfall entstehenden Teilchen (hier π, p) berechnen; bei ruhendem Λ^0 sind sie allein durch die Ruhemassen der Teilchen festgelegt.

Die Impulsbeträge der Zerfallsteilchen folgen aus

$$\vec{p}_\pi^2 = \frac{E_\pi^2}{c^2} - m_\pi^2 c^2$$

$$\vec{p}_p^2 = \frac{E_p^2}{c^2} - m_p^2 c^2$$

Teilchenkollision (hier ohne Indizes für die Vierervektoren)

$$A + B \rightarrow C + D$$

Im Schwerpunktsystem (CMS) [13]:

$$\overrightarrow{p_A} \leftarrow \overleftarrow{p_B} \quad \text{Collider}; \quad p_A + p_B \rightarrow p_C + p_D$$

Im Laborsystem (LS):

$$\xrightarrow{\vec{p}_A^L} \Big|_{\vec{p}_B^L} \text{ fixed Target; } p_A^L + p_B^L \rightarrow p_C^L + p_D^L$$

Mit der zusätzlichen Bedingung (relativistische Energie-Impuls-Erhaltung; hier mit $\hbar \equiv c \equiv 1$):

$$p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \\ \Rightarrow p_A^2 = m_A^2, \quad p_B^2 = m_B^2, \quad p_C^2 = m_C^2, \quad p_D^2 = m_D^2.$$

Es gibt mehrere Lorentz-invariante Größen, insbesondere das Quadrat der Schwerpunktsenergie,

$$s = (p_A + p_B)^2 = (p_C + p_D)^2 = (E_A + E_B)^2 - \underbrace{(\vec{p}_A + \vec{p}_B)^2}_{=0 \text{ im CMS}} = (E_A + E_B)^2.$$

Im **Laborsystem** wird dieselbe Invariante mit $p_A^L = (E_A^L, \vec{p}_A^L)$, $p_B^L = (E_B^L, \vec{p}_B^L) = (m_B, 0)$:

$$s = (p_A^L + p_B^L)^2 = [E_A^L + m_B]^2 - (p_A^L)^2 \\ = (E_A^L)^2 + 2m_B E_A^L + m_B^2 - (p_A^L)^2$$

und mit $(E_A^L)^2 - (p_A^L)^2 = m_A^2$

$$\Rightarrow \boxed{s = m_A^2 + m_B^2 + 2m_B E_A^L}.$$

Mit s ist auch die CMS-Energie $\sqrt{s} \equiv E_{\text{cm}}$ relativistisch invariant.

Mit $(E_A^L)^2 = (\vec{p}_A^L)^2 + m_A^2$ folgt bei hohen relativistischen Energien mit $|\vec{p}_A^L| \gg m_A$:

$$(E_A^L)^2 \simeq (\vec{p}_A^L)^2 \Rightarrow s \rightarrow 2m_B |\vec{p}_A^L|$$

\Rightarrow Die Schwerpunktsenergie wächst im hochrelativistischen Bereich nur mit der Wurzel aus dem Laborimpuls an,

$$\sqrt{s} \rightarrow \sqrt{2m_B |\vec{p}_A^L|} \propto \sqrt{p_A^L}.$$

\Rightarrow Um eine bessere Energieausbeute zu erzielen, verwendet man **Collider** statt Fixed-Target-Maschinen.

Bewegungsgleichung für Massenpunkte

In Dreiernotation (s. Abschn. 4.1) ist die Kraft

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m \frac{d\vec{x}}{dt}) = \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v})$$

In Vierernotation:

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{dt}, \quad p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right).$$

F^μ ist **nicht** Lorentz-invariant; jedoch ist

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dp^\mu}{dt} = \gamma F^\mu$$

invariant, mit der Eigenzeit $\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$, $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$.

γF^μ wird als **Minkowski-Kraft** bezeichnet.

Mit $E = [\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4]^{1/2}$ ist im **Ruhsystem** $\vec{v} = 0$

$$\Rightarrow E \rightarrow mc^2, \quad \frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dp^\mu}{dt} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F} \end{pmatrix}.$$

Allgemein für $\vec{v} \neq 0$ ist die Minkowski-Kraft der pro Eigenzeit zugeführte Impuls/die pro Eigenzeit τ zugeführte Energie/ c .

Literatur

- [1] Einstein, A.: Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Ann. Physik* 17, 891 (1905)
- [2] Fresnel, A.: Sur la diffraction de la lumière. *Annales de chimie et de physique* 1, 239 (1816)
- [3] Bailey, J. et al.: Final report on the CERN muon storage ring including the anomalous magnetic moment and the electric dipole moment of the muon, and a direct test of relativistic time dilation. *Nucl. Phys. B* 150, 1 (1979)
- [4] Botermann, B.: Test of time dilation using stored Li^+ ions as clocks at relativistic speed. *Phys. Rev. Lett.* 113, 120405 (2014)
- [5] Abbas, E. et al. (ALICE Collaboration): Centrality dependence of the pseudorapidity density distribution for charged particles in Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2,76$ TeV. *Phys. Lett. B* 726, 610 (2013)
- [6] Bjorken, J. D.: Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region. *Phys. Rev. D* 27, 140 (1983)
- [7] Wolschin, G.: Ultraviolet energy dependence of particle production sources in relativistic heavy-ion collisions. *Phys. Rev. C* 91, 014905 (2015)
- [8] FitzGerald, G. F.: The Ether and the Earth's Atmosphere. *Science* 13, 390 (1889)
- [9] Lorentz, H. A.: De relatieve beweging van de aarde en den aether. Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. *Wis- en Natuurkundige Afdeeling. Verslagen der Zittingen* 1, 74 (1892-93)
- [10] Michelson, A. A.: The Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether. *American Journal of Science* 22, 120 (1881)
- [11] Michelson, A. A., Morley, E. W.: On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether. *American Journal of Science* 34, 333 (1887)
- [12] Eisele, Ch., Nevsky, A. Yu., Schiller, S.: Laboratory Test of the Isotropy of Light Propagation at the 10^{-17} Level. *Phys. Rev. Lett.* 103, 090401 (2009)
- [13] Olive, K. A. et al. (Particle Data Group): Review of Particle Physics. *Chin. Phys. C* 38, 090001 (2014)

5 Vierdimensionale Formulierung der Elektrodynamik

5.1 Feldstärketensor

In der relativistischen Formulierung der Elektrodynamik fasst man elektrische und magnetische Feldstärke zum Feldstärketensor zusammen, und Ladungs- und Stromdichte zur Viererstromdichte:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Skalares Potenzial Φ und Vektorpotenzial \vec{A} bilden das Viererpotenzial, $(A)^\mu = (\Phi, \vec{A})$, und mit der Viererstromdichte $(j^\mu) = (c\rho, \vec{j})$ wird die Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ zu $\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0$, bzw. mit $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $(\partial_\mu) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$:

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}, \text{ die Viererdivergenz der Viererstromdichte verschwindet.}$$

Allgemein ist die Viererdivergenz eines Vierervektors P ein Skalar, also Lorentz-invariant:

$$\partial_\mu P^\mu = \partial^\mu P_\mu = \partial'^\mu P'_\mu = \partial'_\mu P'^\mu, \quad P'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu.$$

Für das Viererpotenzial A^μ mit $\square A^\mu = +\frac{4\pi}{c} j^\mu$ verschwindet die Viererdivergenz in der **Lorenz-Eichung**:

$$\boxed{\partial_\mu A^\mu = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0}.$$

Aus dem Viererpotenzial folgen die Felder \vec{E} und \vec{B} ,

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \end{aligned}$$

d. h., im Vergleich zum statischen Fall kommt beim \vec{E} -Feld der zeitabhängige Term $\propto \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ hinzu. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \equiv \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 \\ E_1 &= -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \equiv -\partial_1 A^0 - \partial_0 A^1, \end{aligned}$$

und der antisymmetrische Feldtensor wird

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}$$

mit $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, $\text{Sp}(F^{\mu\nu}) = 0$ und den auf der vorigen Seite gezeigten Komponenten.

Dabei gibt es in A^μ noch die Eichfreiheit

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu \psi(x).$$

Mit den Komponenten des Feldtensors formulieren wir die Maxwell-Gleichungen in 4d:

Inhomogene Maxwell-Gleichungen (hier: Vakuum, $\vec{E} \equiv \vec{D}$, $\vec{B} \equiv \vec{H}$)

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho}$$

$$\Rightarrow \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \frac{4\pi}{c} j^0$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}}$$

Die 1-Komponente wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3} - \frac{\partial E_1}{\partial x^0} &= \frac{4\pi}{c} j^1 \\ \Rightarrow \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_0 F^{01} &= \frac{4\pi}{c} j^1 \end{aligned}$$

und analog für die anderen Komponenten, zusammengefasst:

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu}, \quad \boxed{\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\nu}.$$

Mit der Potenzialdarstellung des Feldstärketensors

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

wird das

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

und in der Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ ergeben sich die **inhomogenen Maxwell-Gleichungen**

$$\boxed{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu}.$$

Homogene Maxwell-Gleichungen

$$\boxed{\vec{\nabla} \vec{B} = 0} \Rightarrow \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 = 0$$

$$\Rightarrow -\partial_1 F^{32} - \partial_2 F^{13} + \partial_3 F^{12} = 0 = \partial_1 F^{23} + \partial_2 F^{31} - \partial_3 F^{21}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0}.$$

Für die x (1-)Komponente:

$$\partial_2 F^{30} + \partial_3 F^{02} + \partial_0 F^{23} = 0, \text{ etc. für } y, z(2, 3)$$

Zusammengefasst folgt:

$$\boxed{\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0} \quad \text{Bianchi-Identität}$$

(nur für $\lambda \neq \mu \neq \nu$ sinnvoll, da für mindestens zwei gleiche Indizes identisch erfüllt, z. B. $\lambda = 1, \mu = \nu = 2$: $\partial_1 F^{22} + \partial_2 F^{21} + \partial_2 F^{12} = 0 + \partial_2 B_3 - \partial_2 B_3 = 0$).

Mit dem **dualen Feldtensor** $\tilde{F}^{\mu\nu}$ lassen sich die **homogenen Maxwell-Gleichungen** analog zu den inhomogenen ausdrücken:

$$\boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0} \quad \text{mit} \quad \boxed{\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}}$$

und dem vollständig antisymmetrischen Levi-Civita-Tensor vierter Stufe:

- $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} = 0$ bei zwei gleichen Indizes, sonst Vorzeichenänderung bei Transposition (Vertauschen zweier Indizes: ungerade Permutation)
- $\varepsilon^{0123} = 1 = -\varepsilon_{0123}$, Normierung
- $\varepsilon'^{\mu\nu\lambda\rho} = \det(\Lambda) \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$, $\det(\Lambda) = \pm 1$, (+1 bei eigentlicher Lorentz-Transformation),

so dass

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \text{Sp}(\tilde{F}^{\mu\nu}) = 0, \quad (\tilde{F}^{\mu\nu}) = -(\tilde{F}^{\nu\mu}).$$

Transformationsverhalten des Feldstärketensors:

Es ist

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\kappa \Lambda^\nu{}_\lambda F^{\kappa\lambda} = \Lambda^\mu{}_\rho F^{\rho\sigma} (\Lambda^T)_{\sigma}{}^\nu,$$

oder in Matrixschreibweise,

$$\boxed{F' = \Lambda F \Lambda^T}.$$

Die Eichtransformation

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \psi$$

lässt F invariant.

Transformation der Felder:

Für einen Lorentz-Boost in z -Richtung mit der speziellen Lorentz-Transformation ($\Lambda^\mu{}_\nu$) aus Abschn. 4.3

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

wird

$$\begin{aligned} E'_1 &= F'^{10} = \Lambda^1{}_\kappa \Lambda^0{}_\lambda F^{\kappa\lambda} = 1 \cdot \gamma \cdot F^{10} - \beta\gamma F^{13} = \gamma(F^{10} - \beta F^{13}) \\ &\Rightarrow \boxed{E'_1 = \gamma(E_1 - \beta B_2)} \end{aligned}$$

und analog die restlichen Komponenten der Felder,

$$\begin{aligned} E'_1 &= \gamma(E_1 - \beta B_2), & E'_2 &= \gamma(E_2 + \beta B_1), & E'_3 &= E_3, \\ B'_1 &= \gamma(B_1 + \beta E_2), & B'_2 &= \gamma(B_2 - \beta E_1), & B'_3 &= B_3, \end{aligned}$$

oder zusammengefasst für die Komponenten tangential (\parallel) und senkrecht (\perp) zum Boost,

$$\begin{aligned} E'_\parallel &= E_\parallel, & B'_\parallel &= B_\parallel, \\ \vec{E}'_\perp &= \gamma \left(\vec{E}_\perp + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right), & \vec{B}'_\perp &= \gamma \left(\vec{B}_\perp - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} \right). \end{aligned}$$

\Rightarrow Vektor in der Ebene senkrecht zum Boost.

5.2 Energie-Impuls-Tensor des EM-Feldes

Die **Kraftdichte** auf eine Ladungs- oder Stromverteilung

$$\vec{f} = \varrho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}$$

lässt sich mithilfe des Feldstärketensors darstellen, z. B. für die erste Komponente

$$f^1 = \varrho E_1 + \frac{1}{c} (j^2 B_3 - j^3 B_2) = \frac{1}{c} (j^0 F^{10} - j^2 F^{12} - j^3 F^{13}) = \frac{1}{c} j_\nu F^{1\nu}$$

und analog für die anderen Komponenten. Entsprechend wird der Vierervektor der **Lorentz-Kraftdichte**

$$f^\mu = \frac{1}{c} j_\nu F^{\mu\nu} .$$

Die zeitartige Komponente gibt die pro Zeit und Volumen zugeführte Energie an,

$$f^0 = \frac{1}{c} j_\nu F^{0\nu} = \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} ,$$

so dass sich die Viererkraftdichte schreiben lässt als

$$(f^\mu) = \left(\frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{E}, \vec{f} \right) .$$

Bei Transformationen $f^\mu \rightarrow f'^\mu$ im Minkowski-Raum entsteht eine Mischung aus Coulomb- und Lorentz-Kraft.

Energie-Impuls-Tensor

Wir gehen aus von der inhomogenen Maxwell-Gleichung mit der Viererstromdichte j_ν

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\nu .$$

und der **Viererkraftdichte**

$$f^\mu = \frac{1}{c} j_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \partial^\rho F_{\rho\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[\partial^\rho (F^{\mu\nu} F_{\rho\nu}) - F_{\rho\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu} \right] .$$

Mit der Antisymmetrie des Feldstärketensors und der homogenen Maxwell-Gleichung wird

$$F_{\rho\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[F_{\rho\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu} - F_{\rho\nu} \partial^\nu F^{\mu\rho} \right] = -\frac{1}{2} F_{\rho\nu} \partial^\mu F^{\nu\rho} ,$$

so dass

$$\begin{aligned} f^\mu &= \frac{1}{4\pi} \left[\partial_\sigma (F^{\mu\nu} F^\sigma{}_\nu) - \frac{1}{4} \partial^\mu (F_{\rho\nu} F^{\rho\nu}) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \partial_\sigma \left[F^{\mu\nu} F^\sigma{}_\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\sigma} F_{\rho\nu} F^{\rho\nu} \right] . \end{aligned}$$

Mit Einführung des **Energie-Impuls-Tensors** des EM-Feldes

$$T^{\mu\sigma} := -\frac{1}{4\pi} \left[F^{\mu\nu} F^{\sigma}_{\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\sigma} F_{\rho\nu} F^{\rho\nu} \right]$$

wird die Viererkraftdichte

$$f^{\mu}(x) = -\partial_{\sigma} T^{\mu\sigma}(x) \quad [T^{\mu\sigma} \text{ symmetrisch in } (\mu, \sigma)].$$

Die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors

- Energiedichte: $T^{00} = \frac{1}{8\pi} [\vec{E}^2 + \vec{B}^2] \equiv u$
- Energiestromdichte: $T^{0i} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})_i = \frac{1}{c} S^i = T^{i0}$ (Poynting-Vektor)
- Spannungstensor: $T^{ij} = -\frac{1}{4\pi} [E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)]$

Energiesatz

Die nullte Komponente der Kraftdichte ist mit $j^{\mu} = (c\rho, \vec{j})$

$$f^0 = \frac{1}{c} j_{\mu} F^{\mu 0} = \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{E}$$

und die nullte Komponente der Kraftgleichung wird

$$f^0 = -\partial_{\nu} T^{0\nu} = \frac{1}{4\pi} \partial_{\sigma} \left(F^{0\nu} F^{\sigma}_{\nu} - \frac{1}{4} g^{0\sigma} F_{\rho\nu} F^{\rho\nu} \right)$$

$$f^0 = -\partial_0 T^{00} - \partial_i T^{0i} = -\frac{1}{c} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} u}_{\text{zeitl. \u00c4nderung der Energiedichte}} - \frac{1}{c} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{S}}_{\text{Divergenz des Energieflusses}}$$

$\Rightarrow f^0$ ist das $\frac{1}{c}$ -fache der **Leistungsdichte**.

Der **Impulssatz** folgt aus den r\u00e4umlichen Komponenten von f^{μ} :

$$f^i = -\partial_{\nu} T^{i\nu} = -\partial_0 T^{i0} - \partial_j T^{ij}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} S^i(x) = -f^i(x) - \partial_j T^{ij}(x)}.$$

\uparrow zeitliche \u00c4nderung der Impulsdichte des EM-Feldes
 \uparrow zeitliche \u00c4nderung des Impulses: Kraft
 \uparrow Gradient des Spannungstensors: Impulsflussdichte

Energie-Impuls-Tensor eines bewegten Elektrons

Im **Ruhesystem des Elektrons S'** gibt es nur ein \vec{E} -Feld, **kein \vec{B} -Feld**:

$$T'^{00} = \frac{1}{8\pi} \vec{E}^2 = u \quad \text{Energiedichte}$$

$$T'^{i0} = T'^{0i} = \frac{1}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{B}]_i = 0 \quad \text{Poynting-Vektor}$$

$$T'^{ij} = -\frac{1}{4\pi} \left[E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{E}^2 \right] \quad \text{Spannungstensor}$$

$$(T'^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8\pi} E^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\pi} (E_1^2 - \frac{1}{2} \vec{E}^2) & -\frac{1}{4\pi} (E_1 E_2) & -\frac{1}{4\pi} (E_1 E_3) \\ 0 & -\frac{1}{4\pi} (E_1 E_2) & -\frac{1}{4\pi} (E_2^2 - \frac{1}{2} \vec{E}^2) & -\frac{1}{4\pi} (E_2 E_3) \\ 0 & -\frac{1}{4\pi} (E_1 E_3) & -\frac{1}{4\pi} (E_2 E_3) & -\frac{1}{4\pi} (E_3^2 - \frac{1}{2} \vec{E}^2) \end{pmatrix} = (T'^{\nu\mu})$$

im Ruhesystem des (im System des Beobachters bewegten) Elektrons.

5.3 Lagrange-Formulierung

Analog zur Mechanik erhält man die Bewegungsgleichungen eines Teilchens im Feld aus der Forderung, dass die **Variation der Wirkung S** verschwindet, $\boxed{\delta S = 0}$, mit der Wirkung als Zeitintegral über die Lagrange³²-Funktion $L(t)$ [1]:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L[\vec{x}(t), \vec{v}(t); t] \quad \text{mit} \quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \dot{\vec{x}}(t).$$

Dies ist äquivalent zur **Euler³³-Lagrange³⁴-Gleichung**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

mit dem **kanonischen Impuls³⁵**

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial v^i}.$$

Da die Wirkung S nicht in allen Inertialsystemen gleich ist, verletzt diese Formulierung die Lorentz-Invarianz. Im Folgenden muss daher eine angepasste Wirkung mit zugehöriger Lagrange-Funktion gefunden werden, welche die Forderung nach relativistischer Invarianz erfüllt.

³²Der Lagrange-Formalismus ist eine 1788 von Lagrange eingeführte Formulierung der klassischen Mechanik.

³³Leonhard Euler (*1707 Basel, †1783 Sankt Petersburg), Schweizer Mathematiker und Physiker.

³⁴Joseph-Louis de Lagrange (*1736 Turin, †1813 Paris), italienischer Mathematiker und Astronom.

³⁵Zu unterscheiden vom kinetischen Impuls $\vec{p}_{\text{kin}} = \gamma m \vec{v}$.

Lagrange-Funktion für ein freies Teilchen

Die Lagrange-Funktion für ein nichtrelativistisches freies Teilchen ergibt sich aus dessen Bewegungsenergie,

$$L_0^{\text{nr}} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 \quad \text{mit} \quad \vec{v} \equiv \vec{v}(t) .$$

Die Addition eines konstanten Terms lässt die Bewegungsgleichungen unverändert, da dieser bei Variation der Wirkung verschwindet. Die alternative Lagrange-Funktion

$$\tilde{L}_0^{\text{nr}} = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

besitzt also den gleichen physikalischen Gehalt und beschreibt das Teilchen identisch zu L_0^{nr} . Für die Lagrange-Funktion eines relativistischen freien Teilchen wählen wir nun den Ansatz

$$\boxed{L_0 = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} = -mc^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \mathcal{O}\left(\frac{\vec{v}^4}{c^4}\right) ,}$$

im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten geht dies in die obige nichtrelativistische Lagrange-Funktion L_0^{nr} über. Die zugehörige Wirkung ist

$$S = \int dt L_0(t) = -mc^2 \int dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} .$$

Mit der Definition der Vierergeschwindigkeit

$$u^0 = c \frac{dt}{d\tau} , \quad u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = v^i \frac{dt}{d\tau} ,$$

lassen sich S und L_0 umschreiben zu

$$S = -mc \int d\tau \sqrt{u_\mu u^\mu} , \quad L_0 = -mc \sqrt{u_\mu u^\mu} .$$

$\Rightarrow L_0$ ist Lorentz-Skalar und S unabhängig vom Bezugssystem, da die Integration über die Eigenzeit $\tau = \int dt \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}$ erfolgt.

Der **kanonische Viererimpuls** ergibt sich analog zum nichtrelativistischen Fall zu

$$p_\mu^{\text{kan}} = \frac{\partial L_0}{\partial u^\mu} = -mc \frac{u_\mu}{\sqrt{u_\mu u^\mu}}$$

und die Bewegungsgleichung für ein freies Teilchen wird (verschwindende Variation der Wirkung, oder aus der relativistischen Euler-Lagrange-Gleichung, s. folgender Abschnitt)

$$\boxed{m \frac{du^\mu}{d\tau} = 0} .$$

Ankopplung an das EM-Feld

Die Lagrange-Funktion zur Ankopplung der Ladung q an das elektromagnetische Feld ist klassisch (nichtrelativistisch)

$$L_{\text{em}}^{\text{nr}} = -q\Phi + \frac{q}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}$$

mit der Dreiergeschwindigkeit \vec{v} der bewegten Ladung. Mit $A^\mu \equiv (\Phi, \vec{A})$ und $u^\mu \equiv \gamma(c, \vec{v})$ wird die Lorentz-invariante Lagrange-Funktion für die Ankopplung an das Feld

$$\boxed{L_{\text{em}} = -\frac{q}{c} u_\mu A^\mu = -\frac{q}{c} u^\mu A_\mu} .$$

Entsprechend lautet die gesamte Lagrange-Funktion

$$L = L_0 + L_{\text{em}} = -mc\sqrt{u_\mu u^\mu} - \frac{q}{c} u^\nu A_\nu .$$

Die relativistische Euler-Lagrange-Gleichung [3]

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial u^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0$$

liefert damit

$$-m \frac{du_\mu}{d\tau} - \frac{q}{c} \frac{dA_\mu}{d\tau} + \frac{q}{c} u^\nu \partial_\mu A_\nu = 0 .$$

Es ist

$$-\frac{q}{c} \frac{dA_\mu}{d\tau} = -\frac{q}{c} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \partial_\nu A_\mu = -\frac{q}{c} u^\nu \partial_\nu A_\mu$$

und mit dem Feldstärketensor

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, & F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\ F_\nu{}^\mu &= \partial_\nu A^\mu - \partial^\mu A_\nu, & F_\nu{}^\mu &= -F_\mu{}^\nu, \end{aligned}$$

lässt sich das zusammenfassen als

$$-m \frac{du^\mu}{d\tau} + \frac{q}{c} F_{\nu\mu} u^\nu = 0 .$$

Mit der Antisymmetrie der Feldstärketensors folgt schließlich die Bewegungsgleichung im Feld

$$\boxed{m \frac{du_\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} u^\nu} .$$

Der **kanonische Impuls** ist ($i=1,2,3$)

$$p_i^{\text{kan}} = \frac{\partial L}{\partial v^i} = \gamma m v_i + \frac{q}{c} A_i \equiv p_i^{\text{kin}} + \frac{q}{c} A_i$$

und die **Hamilton³⁶-Funktion** [2]

$$H = \vec{p}^{\text{kan}} \cdot \vec{v} - L[x(t), v(t); t]$$

$$H = \sqrt{(c\vec{p}^{\text{kan}} - q\vec{A})^2 + m^2c^4} + q\Phi.$$

Energieerhaltung ist gleichbedeutend mit einer zeitlich konstanten Hamilton-Funktion, $\frac{d}{dt}H = 0$.

5.4 Lagrange-Dichte des EM-Feldes

Sei $\mathcal{L}(x) \equiv \mathcal{L}(\vec{x}, t)$ die Lagrange-Dichte des EM-Feldes eines Systems von Punktladungen bei x_i mit Massen m_i . Dann folgt die Lagrange-Funktion durch Integration über den räumlichen Anteil,

$$L(t) = c \int d^3x \mathcal{L}(\vec{x}, t),$$

und die **Wirkung** ist

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x) = c \int dt \int d^3x \mathcal{L}(\vec{x}, t) = \int dt L(t).$$

Die Lagrange-Dichte hat drei Anteile:

1. den mechanischen Anteil der Punktladungen mit Massen m_i ,

$$\mathcal{L}_0 = - \sum_i m_i c \sqrt{u_\mu u^\mu} \int d\tau \delta^4[x - x_i(\tau)] ,$$

2. die Kopplung der Ladungen an das Feld (wie in Abschn. 5.3)

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = -\frac{1}{c^2} A^\mu j_\mu$$

mit der Viererstromdichte für Punktladungen

$$j_\mu(x) = j_\mu(\vec{r}, t) = \sum_i q_i \frac{d}{dt} x_{i,\mu} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i) ,$$

3. den Feldanteil

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{16\pi c} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_{\text{em}}(x) + \mathcal{L}_{\text{EM}}(x)} .$$

³⁶William Rowan Hamilton (*1805 Dublin, †1865 Dunsink), irischer Mathematiker und Physiker.

Für **eine** Punktladung mit $q_i = q_1 = q$ folgt nach Integration über d^4x der S_{em} -Anteil der Wirkung S aus Abschn. 5.3, mit $\int j_\mu d^3x = qu_\mu$:

$$\begin{aligned} S_{\text{em}} &= \int d^4x \left(-\frac{1}{c^2} A^\mu j_\mu \right) = -c \int dt \int d^3x \frac{1}{c^2} A^\mu j_\mu \\ &= -\frac{q}{c} \int dt A^\mu u_\mu = \int_{t_1}^{t_2} dt L_{\text{em}}(t). \end{aligned}$$

Der Beitrag (3) des freien Feldes ergibt die homogenen Maxwell-Gleichungen, mit (2) folgen die inhomogenen Maxwell-Gleichungen.

Die **Wirkung** soll extremal unter **Variation des Viererpotenzials A^μ** sein; die Verallgemeinerung der Lagrange-Bewegungsgleichung auf Felder folgt dann aus der Forderung, dass die Variation von S verschwindet [4].

Dabei ist der Feldstärketensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, so dass die **Variation von $\mathcal{L}(x)$** bezüglich A ergibt:

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi c} F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} j_\nu \delta A^\nu$$

mit

$$\begin{aligned} \delta F^{\mu\nu} &= \delta(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu \\ \Rightarrow F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} &= F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu - F_{\mu\nu} \partial^\nu \delta A^\mu \stackrel{F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}}{=} 2F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu \\ \Rightarrow \delta\mathcal{L} &= -\frac{1}{4\pi c} F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu - \frac{1}{c^2} j_\nu \delta A^\nu, \end{aligned}$$

und mit $S = \int d^4x \mathcal{L}(x)$ folgt die Variation der Wirkung S nach A :

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left[-\frac{1}{4\pi c} F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu - \frac{1}{c^2} j_\nu \delta A^\nu \right] \\ &= - \int d^4x \frac{1}{4\pi c} \partial^\mu (F_{\mu\nu} \delta A^\nu) + \int d^4x \left[\frac{1}{4\pi c} \partial^\mu F_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} j_\nu \right] \delta A^\nu \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Der erste Term ist ein **Oberflächenterm** im vierdimensionalen Raum, auf den wir den Gauß'schen Satz anwenden:

$$\int d^4x \partial^\mu (\dots)_\mu = \oint d^3x n^\mu (\dots)_\mu,$$

so dass er für große Oberflächen bei $x \rightarrow \infty$ verschwindet. Der zweite Term ergibt für $\delta S = 0$ die **inhomogenen Maxwell-Gleichungen**,

$$\boxed{\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\nu}, \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu} \quad \text{in Lorenz-Eichung.}$$

Die homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\boxed{\partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0} \quad \text{mit} \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\lambda\rho}$$

sind für $F^{\lambda\rho} = \partial^\lambda A^\rho - \partial^\rho A^\lambda$ ebenfalls erfüllt, d. h., die gesamte Maxwell-Theorie folgt aus der Forderung, dass die **Variation der Wirkung verschwindet**: Sie ist eine relativistische Verallgemeinerung der Euler-Lagrange-Gleichung auf Felder. Eine detaillierte Darstellung der vierdimensionalen Formulierung der Elektrodynamik findet sich insbesondere in [4].

Literatur

- [1] Lagrange, J.-L.: *Mécanique Analytique*, Desaint, Paris (1788)
- [2] Hamilton, W. R.: *Second Essay on a General Method in Dynamics*. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 125, 95 (1835)
- [3] Jackson, J. D.: *Classical Electrodynamics*, 3rd edition; ch. 12. J. Wiley, New York (1998)
- [4] Landau, L. D., Lifshitz, E. M.: *The Classical Theory of Fields*, 4th revised english edition. Butterworth-Heinemann, Oxford (2000)

6 Elektromagnetische Wellen

6.1 Wellen im Vakuum

Im Vakuum ist $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$, $\vec{E} = \vec{D}$, $\vec{B} = \vec{H}$; die Maxwell-Gleichungen sind dann

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\vec{B}}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c} \dot{\vec{E}}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0.\end{aligned}$$

\Rightarrow Die \vec{E} - und \vec{B} -Felder müssen zeitlich veränderlich sein, denn wären Rotation **und** Divergenz identisch Null, würden die Felder konstant sein.

Mit dem Potenzial $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$ als Ursprung der Felder ist

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Setzen wir aufgrund der Eichfreiheit $\Phi = 0$ (Weyl-Eichung), wird die Maxwell-Gleichung für $\vec{\nabla} \times \vec{B}$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}. \quad (*)$$

Übliche **Eichtransformationen** für das Potenzial A^μ stellen in der Regel eine der Forderungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad \text{Coulomb-Eichung, oder}$$

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu A^\mu = 0, \quad \text{Lorenz-Eichung.}$$

Allgemein ist die Eichtransformation

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \psi(x)$$

mit beliebigem $\psi(x)$, in Komponenten:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} - \vec{\nabla}\psi, \quad \Phi \rightarrow \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

⇒ In Coulomb-Eichung (die Weyl-Eichung schöpft die Eichfreiheit nicht vollständig aus) wird die Gleichung (*) zur **Wellengleichung (d'Alembert-Gleichung)** [1]

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = 0}.$$

Lösungen sind beliebig geformte Wellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.

D'Alembert'sche Lösung für eine räumliche Koordinate: ($\vec{A} \rightarrow A^1 \equiv A$)

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

Ansatz: $A(x, t) = F_1(x + ct) + F_2(x - ct)$ mit willkürlichen reellen Funktionen F_1, F_2

Anfangsbedingungen für $t = 0$:

$$A = f_1(x), \quad \frac{\partial A}{\partial t} = f_2(x)$$

$$\Rightarrow F_1(x) + F_2(x) = f_1(x), \quad t = 0$$

$$F_1'(x) - F_2'(x) = \frac{1}{c} f_2(x)$$

Integration ergibt:

$$F_{1,2}(x) = \frac{1}{2} \left[f_1(x) \pm \frac{1}{c} \int_{x_0}^x f_2(\xi) d\xi \right]:$$

d. h., für $f_2 = 0$ läuft $f_1(x)$ **mit Lichtgeschwindigkeit c** zur Hälfte nach links, zur anderen Hälfte nach rechts (ohne Formänderung, Abb. 6.1).

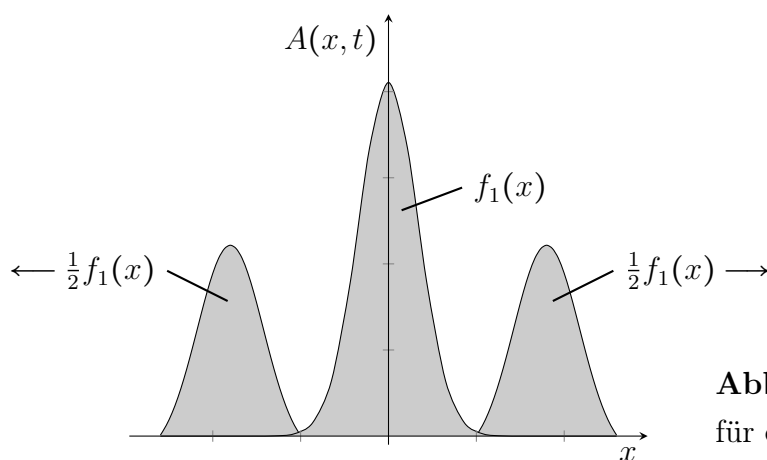


Abb. 6.1 D'Alembert'sche Lösung für eine Koordinate x

Bei periodischen Schwingungen mit Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$, Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$ sind F_1, F_2 trigonometrische Funktionen mit Phasen α, β und Amplituden a, b :

$$F_1(x + ct) = b \cos(kx + \omega t + \beta) \quad \text{in } -x\text{-Richtung,}$$

$$F_2(x - ct) = a \cos(kx - \omega t + \alpha) \quad \text{in } x\text{-Richtung.}$$

Bei $a = b$ ergibt die Überlagerung eine stehende Welle. Es ist

$$\boxed{c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \nu\lambda}$$

mit der Wellenlänge λ und der (Kreis-)Wellenzahl $k = |\vec{k}| = \omega/c = 2\pi/\lambda$.

Lorentz-invariante (kovariante) Herleitung der Wellengleichung

Die Maxwell-Gleichungen sind in kontravarianter Schreibweise:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu = 0 \quad \text{für } j^\nu = 0 .$$

Wegen $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} \right) = \frac{\partial^2 A^\nu}{\partial x^\mu \partial x_\mu} - \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x^\mu \partial x_\nu} = 0$$

und in Lorenz-Eichung ist

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 A^\nu}{\partial x^\mu \partial x_\mu} = 0 .$$

Mit dem d'Alembert-Operator $\frac{\partial^2}{(\partial x^\mu \partial x_\mu)} = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \equiv \square$ entspricht das der Wellengleichung in vierdimensionaler Darstellung,

$$\boxed{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0} \quad \text{oder} \quad \boxed{\square A^\nu = 0} .$$

Beachte: Bei der Herleitung der vierdimensionalen Wellengleichung haben wir die Lorenz-Eichung verwendet, im (3+1)-dimensionalen Fall die Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ plus $\Phi = 0$, so dass ebenfalls $\partial_\mu A^\mu = 0$ folgt.

6.2 Ebene Wellen

Weil die Wellenprofile $F_1(x + ct), F_2(x - ct)$ nicht von y und z abhängen – auf Ebenen $x = \text{const}$ konstant sind –, und sich die Welle mit Ausbreitungsgeschwindigkeit c in x -Richtung bewegt,

$$\vec{n} := \frac{\vec{c}}{c} \equiv \vec{e}_x ,$$

handelt es sich um eine **ebene Welle**. In der Eichung $\Phi = 0$, $\vec{\nabla} \vec{A} = 0$ ist das elektrische Feld

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial A_x}{\partial x} = 0 \quad \text{wegen} \quad \vec{\nabla} \vec{A} = 0,$$

da \vec{A} nicht von y oder z abhängt. Aus der Wellengleichung folgt dann

$$\frac{\partial^2 A^x}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A^x}{\partial t} = \text{const.}$$

\Rightarrow Die A^x entsprechende Komponente E^x des elektrischen Feldes ist konstant.

\Rightarrow Die \vec{E} - und \vec{B} -Felder der ebenen Welle stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung.

Betrachte Wellen, die sich **in positiver x -Richtung** ausbreiten, $F_2(x - ct) = A(x, t)$:

Die Felder hängen nur von $t - x/c$ ab,

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{c} \vec{A}' \quad (\vec{A}' \equiv \text{Ableitung nach } t - \frac{x}{c})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow B_i &= \left[\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(t - \frac{x}{c} \right) A'_k \right] = \varepsilon_{ijk} \delta_{j1} A'_k \left(-\frac{1}{c} \right) \\ &= -\frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} (\vec{e}^1)_j A'_k = \left[-\frac{1}{c} (\vec{n} \times \vec{A}') \right]_i. \end{aligned}$$

Mit $\vec{A}' = -c\vec{E}$ folgt daraus

$$\boxed{\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}},$$

d. h., \vec{B} und \vec{E} stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle und senkrecht aufeinander (Abb. 6.2)

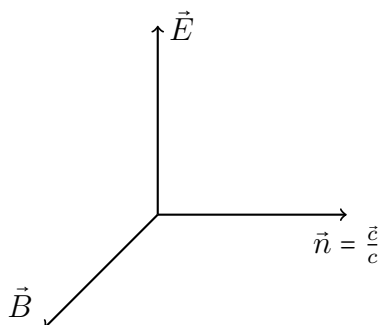


Abb. 6.2 Elektromagnetische Wellen als Transversalwellen

⇒ Elektromagnetische Wellen im Vakuum sind Transversalwellen; es ist $|\vec{B}| = |\vec{E}|$. Als Folge der Transversalität ($\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$) wird für ebene Wellen der **Poynting³⁷-Vektor** der Energiestromdichte

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E})] = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}^2 \cdot \vec{n} - (\vec{E} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{E}] = \frac{c}{4\pi} \vec{E}^2 \cdot \vec{n},$$

d. h., die Richtung der Energiestromdichte ist gleich der Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle, und ihr Betrag ist $(c/4\pi)\vec{E}^2$. Mit der **Energiedichte** $w = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = \frac{1}{4\pi}\vec{E}^2$ wird dies zu

$$\boxed{\vec{S} = c \cdot w \cdot \vec{n}}.$$

Die ebene Welle transportiert ihre Energie mit Lichtgeschwindigkeit in Ausbreitungsrichtung \vec{n} .

Wellenvektor

Bei Wellenausbreitung in Richtung \vec{n} ist $F((x - ct) \cdot \vec{n})$ konstant auf Ebenen senkrecht zu \vec{n} . Sie lassen sich beschreiben durch den **Viererwellenvektor**

$$\boxed{k^\mu := \frac{\omega}{c}(1, \vec{n}) \equiv \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)}$$

mit dem Dreierwellenvektor $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \cdot \vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \vec{n}$ und dem Betrag

$$\boxed{k_\mu k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (1 - \vec{n}^2) = 0}.$$

Die Ebenen zu konstantem F sind dann $k_\mu x^\mu = \omega t - \vec{k}\vec{x} = \text{const}$ oder $\vec{k}\vec{x} - \omega t = \text{const}'$. Der Wellenvektor \vec{k} ist der Gradient der Phase, $\vec{k} = -\vec{\nabla}(k_\mu x^\mu)$, und die **Phasengeschwindigkeit** \vec{v} der Welle wird (mit $kdx - \omega dt = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = c$)

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\vec{k}}{k} = \frac{\omega}{k} \cdot \frac{\vec{k}}{k} = c\vec{n}.$$

Jede zweimal differenzierbare Funktion der Phase $k_\mu x^\mu$ ist eine Lösung der Wellengleichung. Insbesondere gilt das für die **harmonischen Funktionen** $F(k_\mu x^\mu) = e^{-ik_\mu x^\mu}$, die eine **vollständige Orthonormalbasis** im Raum der Eigenfunktionen des d'Alembert-Operators \square bilden. Sie stellen **monochromatische ebene Wellen** dar:

$$\boxed{\square e^{-ik_\mu x^\mu} = 0}.$$

³⁷John Henry Poynting (*1852 Monton, †1914 Birmingham), englischer Physiker.

Die Lösungen sind ebene Wellen zu festem \vec{k} und $\omega = c|\vec{k}|$. Jedes andere Wellenprofil lässt sich aus solchen monochromatischen Wellen durch **vierdimensionale Fourier³⁸-Transformation** erzeugen,

$$G(x^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k^\mu \tilde{G}(k^\mu) e^{-ik_\mu x^\mu}.$$

Die elektrische und magnetische Feldstärke einer ebenen monochromatischen Welle lassen sich wegen $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ ausdrücken als

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}, t) &= \text{Re} \left[E_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \right] \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \text{Re} \left[B_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \right], \end{aligned}$$

und mit $\vec{\nabla} \vec{E} = i\vec{k} \vec{E}$, $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}$ (analog für \vec{B}) werden die Maxwell-Gleichungen für monochromatische ebene Wellen

$$\left. \begin{aligned} i\vec{k} \times \vec{E} &= +\frac{i\omega}{c} \vec{B} \\ i\vec{k} \times \vec{B} &= -\frac{i\omega}{c} \vec{E} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \vec{k} \times \vec{E} &= \frac{\omega}{c} \vec{B}, & \vec{k} \cdot \vec{E} &= 0, \\ \vec{k} \times \vec{B} &= -\frac{\omega}{c} \vec{E}, & \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Wegen $\vec{k} \cdot \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ sind die Wellen **transversal**. Die Kombination der ersten beiden Maxwell-Gleichungen ergibt

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{\omega}{c} \vec{k} \times \vec{B} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}$$

und mit

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = (\vec{k}\vec{E})\vec{k} - (\vec{k}\vec{k})\vec{E} = -\vec{k}^2 \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}$$

wird die **Dispersionsrelation** zwischen Kreisfrequenz ω und (Kreis-)Wellenvektor \vec{k}

$$\boxed{\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Leftrightarrow k_\mu k^\mu = 0}.$$

Die Dispersionsrelation folgt auch direkt aus der Wellengleichung für \vec{E} oder \vec{B} ,

$$\square \vec{E} = 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right] \vec{E} = 0 \Rightarrow \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2 \right) \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Polarisation ebener Wellen

Ausbreitungsrichtung \vec{k} , \vec{E} und \vec{B} definieren ein Dreibein (Abb. 6.3)

³⁸Jean Baptiste Joseph Fourier (*1768 Auxerre, †1830 Paris), französischer Mathematiker und Physiker.

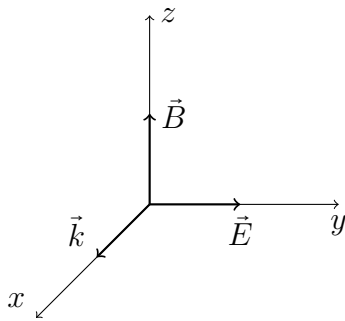


Abb. 6.3 Polarisation ebener Wellen

Zeigt \vec{k} in x -Richtung und \vec{E} in y -Richtung, liegt \vec{B} wegen $\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c} \vec{B}$ in z -Richtung.

Zur Beschreibung der Welle reicht aufgrund der Beziehung zwischen \vec{E} und \vec{B} die Angabe des \vec{E} -Feldes. Der Vektor \vec{E} liegt in einer Ebene senkrecht zu \vec{k} (x -Richtung), die durch die Einheitsvektoren $\vec{\varepsilon}_1$ und $\vec{\varepsilon}_2$ mit $\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2 = 0$ aufgespannt wird,

$$\vec{E} = (E_1 \vec{\varepsilon}_1 + E_2 \vec{\varepsilon}_2) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$$

mit i. Allg. **komplexen** Amplituden E_1 und E_2 , da es eine Phasenverschiebung geben kann.

Linear polarisiert nennt man die Welle, wenn die Wellenzüge keine Phasenverschiebung haben, so dass der Winkel zwischen \vec{E} und der $\vec{\varepsilon}_1$ -Achse $\vartheta = \arctan(E_2/E_1)$ wird (Abb. 6.4), und die Amplitude $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$. Die Richtung der Schwingung ist konstant.

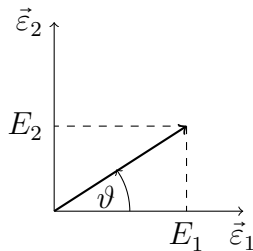


Abb. 6.4 Linear polarisierte Wellen

Elliptisch polarisiert ist die Welle, wenn die Wellenzüge eine Phasenverschiebung φ haben, so dass

$$\vec{E} = E_1 \vec{\varepsilon}_1 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} + E_2 \vec{\varepsilon}_2 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \varphi)}.$$

Für die Realteile ist ($\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2 = 0$, $|\vec{\varepsilon}_1|^2 = |\vec{\varepsilon}_2|^2 = 1$)

$$E_1(\vec{x}, t) = \text{Re}(\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{E}) = E_1 \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t),$$

$$E_2(\vec{x}, t) = \text{Re}(\vec{\varepsilon}_2 \cdot \vec{E}) = E_2 \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \varphi),$$

und mit $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ folgt

$$E_2(\vec{x}, t) = E_2 \left[\cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t) \cos \varphi - \underbrace{\sin(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}_{\equiv \alpha} \sin \varphi \right],$$

$$\left(\frac{E_1(\vec{x}, t)}{E_1} \right)^2 + \left(\frac{E_2(\vec{x}, t)}{E_2} \right)^2 = \cos^2 \alpha + (\cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi)^2 \rightarrow 1 \text{ für } \varphi = \pm \frac{\pi}{2} (2n + 1).$$

⇒ Gleichung einer **Ellipse** mit Halbachsen E_1, E_2 . Der \vec{E} -Vektor läuft auf einer Ellipse um die Ausbreitungsrichtung $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right)$.

Zirkular polarisiert ist die Welle für $E_1 = E_2$ und $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$. Es ist dann

$$E_1(\vec{x}, t) = E_1 \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t)$$

$$E_2(\vec{x}, t) = E_2 \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t \pm \frac{\pi}{2}) = \pm E_2 \sin(\vec{k}\vec{x} - \omega t)$$

⇒ Der \vec{E} -Vektor läuft auf einem Kreis um die Ausbreitungsrichtung (Abb. 6.5). Je nach Vorzeichen von φ entsteht rechts- oder linkszirkular polarisiertes Licht.

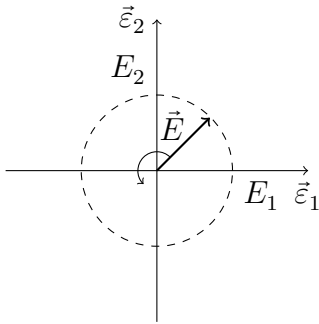


Abb. 6.5 Zirkular polarisierte Wellen

6.3 Elektromagnetische Wellen in Materie

Zunächst untersuchen wir die Wellenausbreitung in homogenen, unendlich ausgedehnten Medien [2] mit **Dielektrizitätskonstante** ε und **Permeabilität** μ , so dass

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}; \quad \sigma = \text{Leitfähigkeit.}$$

In neutralen Medien verschwindet die freie Ladungsdichte $\varrho = \varrho_f = 0$, und die Maxwell-Gleichungen werden

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\mu}{c} \dot{\vec{H}}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{\varepsilon}{c} \dot{\vec{E}} + \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0. \end{aligned}$$

Wellen in Medien lassen sich durch die **Telegraphengleichungen** [3] beschreiben, die für $\sigma = 0$ (in Isolatoren) in normale Wellengleichungen übergehen:

Die Rotation der 2. Maxwell-Gleichung ist

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H} = -\Delta \vec{H}$$

und mit der 1. Maxwell-Gleichung:

$$-\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial H}{\partial t} = -\Delta \vec{H}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{H} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \ddot{\vec{H}} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \dot{\vec{H}}$$

sowie analog für das elektrische Feld

$$\Delta \vec{E} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \ddot{\vec{E}} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \dot{\vec{E}}.$$

Für $\sigma = 0$ folgen aus den beiden Telegrafengleichungen die Wellengleichungen in **Isolatoren**:

$$\left(\frac{1}{\hat{c}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{E} = 0, \quad \left(\frac{1}{\hat{c}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{B} = 0,$$

mit der **Lichtgeschwindigkeit im Medium**

$$\hat{c} \equiv \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

und dem **Brechungsindex**

$$n := \frac{c}{\hat{c}} = \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Oft gilt $\mu \simeq 1 \Rightarrow n \simeq \sqrt{\varepsilon}$. Für sichtbares Licht und transparente Medien ist $1 \leq n \leq 2$. Für Röntgenstrahlen und in Plasmen ist $n \leq 1$. Die Dispersionsrelation für Isolatoren mit (μ, ε) wird

$$k^2 = \frac{\omega^2}{\hat{c}^2} = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} = \varepsilon \cdot \mu \frac{\omega^2}{c^2}$$

mit

- $\varepsilon \geq 1$ (Vakuum 1.0, Luft 1.00059, Wasser 77),
- $\mu > 1$ in Paramagnetika, $\mu \gg 1$ in Ferromagnetika, oder $0 \leq \mu < 1$ in Diamagnetika,

d. h., für $\mu < 1$ kann die Phasengeschwindigkeit des Lichts \hat{c} im Medium (\equiv Geschwindigkeit der Wellenfront) größer als $> c$ werden. Die Geschwindigkeit der Photonen ist jedoch durch die Gruppengeschwindigkeit bestimmt, die bei normaler Dispersion stets kleiner als c ist.

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c (bzw. \hat{c} in Medien) ist die **Phasengeschwindigkeit** der Welle, d. h. ihre Phase $\varphi = \vec{k}\vec{x} - \omega t$ schreitet mit c fort. In einer Dimension sind die Orte gleicher Phase zu verschiedenen Zeiten gegeben durch

$$kx - \omega t = \text{const} \Rightarrow kdx - \omega dt = 0$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = c} \quad \text{Phasengeschwindigkeit.}$$

Bei **Überlagerung** von Wellen verschiedener (benachbarter) Frequenzen zu einem **Wellenpaket** ist dessen **Gruppengeschwindigkeit** u i. Allg. von c verschieden,

$$\boxed{u = \frac{d\omega}{dk}} \quad \text{Gruppengeschwindigkeit.}$$

Sie ist z. B. eine wichtige Größe in der Wellenmechanik, wo die **de Broglie**-Wellenlänge eines Elementarteilchens umgekehrt proportional zur Gruppengeschwindigkeit ist,

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot u} \Rightarrow u = \frac{h}{m\lambda}.$$

Für monochromatische Wellen mit $\omega = \text{const}$ ist die Phasengeschwindigkeit gleich der Gruppengeschwindigkeit. Bei Wellenpaketen gilt: Nur bei **dispersionsloser** Wellenausbreitung (d. h., die Phasengeschwindigkeit hängt nicht von der Wellenlänge ab) fallen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit zusammen, so dass eine Wellengruppe ohne Formänderung fortschreiten kann:

$$\omega = ck \Rightarrow d\omega = cdk \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = c \equiv u.$$

Im Allgemeinen ist jedoch

$$\begin{aligned} d\omega &= cdk + kdc, & \left(u = \frac{d\omega}{dk}; \quad k = 2\pi\lambda^{-1}, \quad \frac{dk}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda^2} \right) \\ \Rightarrow u &= c + k \frac{dc}{dk}, & \left(\frac{dc}{dk} = \frac{dc}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} = -\frac{dc}{d\lambda} \frac{\lambda^2}{2\pi} \Rightarrow k \frac{dc}{dk} = -\lambda \frac{dc}{d\lambda} \right) \\ \Rightarrow u &= c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}. & \text{Zusammenhang Gruppen-/Phasengeschwindigkeit} \end{aligned}$$

Dies ergibt die drei Fälle:

- **keine** Dispersion: $\frac{dc}{d\lambda} = 0 \Rightarrow u = c$
- **normale** Dispersion: $\frac{dc}{d\lambda} > 0 \Rightarrow u < c$

- **anomale** Dispersion: $\frac{dc}{d\lambda} < 0 \Rightarrow u > c$

(Im Fall anomaler Dispersion breitet sich Information jedoch mit einer Signalgeschwindigkeit $v < c$ aus, die von der Gruppengeschwindigkeit u verschieden ist.)

6.3.1 Elektromagnetische Wellen in Leitern

Wir betrachten zunächst homogene Leiter mit der Leitfähigkeit σ (Einheit im Gauß-System $1/s$) und der Stromdichte $\vec{j} \equiv \vec{j}_f$ der freien Ladungen $\rho \equiv \rho_f$, $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Für die meisten Leiter gilt $\mu \simeq 1$, und wir setzen hier $\mu \equiv 1$, so dass $\vec{H} \equiv \vec{B}$, und die Maxwell-Gleichung für $\vec{\nabla} \times \vec{H}$ wird

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \varepsilon \dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} .$$

Für die Ausbreitung monochromatischer ebener Wellen im Leiter mit Kreisfrequenz ω und

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}|_{t=0} e^{-i\omega t} \equiv \vec{E}|_{t=0, \vec{x}=0} e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}, & \rho &= \rho|_{t=0} e^{-i\omega t}, \\ \vec{B} &= \vec{B}|_{t=0} e^{-i\omega t}, & \vec{j} &= \vec{j}|_{t=0} e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

folgt

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 + \left(\frac{i\omega}{c} \varepsilon - \frac{4\pi}{c} \sigma \right) \vec{E}_0 = 0 .$$

Wir führen eine **komplexe Dielektrizitätskonstante** ein als

$$\varepsilon(\omega) := \varepsilon - \frac{4\pi}{i\omega} \sigma \quad \text{so dass} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 + \frac{i\omega}{c} \varepsilon(\omega) \vec{E}_0 = 0 .$$

Die Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ ergibt einerseits

$$-i\omega \rho_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_0 = 0 ,$$

so dass mit $\vec{D}_0 = \varepsilon \vec{E}_0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho$ und $\rho_0 = \frac{1}{i\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_0$ folgt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}_0 = 4\pi \rho_0 = \frac{4\pi}{i\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_0 = \frac{4\pi\sigma}{i\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 \Rightarrow \left(\varepsilon - \frac{4\pi\sigma}{i\omega} \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = 0$$

$$\varepsilon(\omega) \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = 0 .$$

Die Ergebnisse für die **Dispersionsrelation** von Isolatoren lassen sich auf Leiter übertragen, wenn wir ε durch $\varepsilon(\omega)$ ersetzen:

$$k^2 = \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{für Leiter,} \quad k = \sqrt{\varepsilon(\omega)} \frac{\omega}{c} .$$

Für reelle Kreisfrequenz ω wird der Wellenvektor \vec{k} **komplex**, da $\varepsilon(\omega)$ komplex ist (die Feldstärke \vec{E} ist stets reell):

$$\sqrt{\varepsilon(\omega)} \equiv n + i\kappa,$$

$$k = |\vec{k}| = \frac{\omega}{c} |n + i\kappa| \quad [\kappa = \kappa(\omega)]$$

und mit

$$e^{ikz} = e^{i\omega n z/c - \omega \kappa z/c}$$

ergibt sich wegen des Dämpfungsterms $e^{-\omega \kappa z/c}$ eine **gedämpfte Welle**. Aufgrund der Dämpfung fällt die Amplitude der \vec{E} - und \vec{B} -Felder auf einer Strecke

$$d \equiv \frac{c}{\omega \cdot \kappa}$$

auf $1/e$ ab; man nennt d die **Eindringtiefe**.

In $\varepsilon(\omega) = \varepsilon - \frac{4\pi\sigma}{i\omega}$ ist für **hinreichend kleine Frequenzen** ω :

$$\frac{4\pi\sigma}{i\omega} \gg \varepsilon \Rightarrow \varepsilon(\omega) \approx -\frac{4\pi\sigma}{i\omega}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\varepsilon(\omega)} \approx \sqrt{-\frac{4\pi\sigma}{i\omega}} = (1+i) \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} \quad \text{wegen } (1+i)^2 = 2i = -\frac{2}{i}$$

$$= n + i\kappa \quad \text{mit } n = \kappa = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}$$

$$\Rightarrow d = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}.$$

Mit $d \propto 1/\sqrt{\omega}$ wird die Eindringtiefe bei höheren Frequenzen klein: Die Wellen breiten sich nur im Außenbereich des Metalls aus.

Beispiel Kupfer: $\sigma = 5,8 \cdot 10^{17} \text{ s}$ für $\omega = 2\pi \cdot 50 \text{ s}$ (Frequenz $\nu = 50 \text{ Hz}$)

$$\Rightarrow d \approx \frac{3 \cdot 10^{10} \text{ cm}}{\sqrt{2\pi \cdot 5,8 \cdot 10^{17} \cdot 2\pi \cdot 50}} \approx 0,088 \text{ cm} \approx 9 \text{ mm}. \quad \text{Für } \nu = 5 \cdot 10^8 \text{ Hz: } d \approx 2,8 \cdot 10^{-4} \text{ mm}.$$

Frequenzabhängige Leitfähigkeit $\sigma(\omega)$

Im Allgemeinen ist nicht nur die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon(\omega)$, sondern auch die **Leitfähigkeit** von der Frequenz abhängig: $\sigma = \sigma(\omega)$. Wir untersuchen ein einfaches Modell für $\sigma(\omega)$: Die Leitfähigkeit kommt durch die Bewegung von Elektronen mit Masse $m \equiv m_e = 511 \text{ keV}/c^2$ und Ladung $q = -e$ zustande; sie sind infolge der Stöße mit anderen Teilchen einer Reibungskraft $\propto \vec{v}$ ausgesetzt.

⇒ Bewegungsgleichung:

$$\boxed{m\ddot{\vec{x}} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau}\dot{\vec{x}}}$$

Die Relaxationszeit τ ist umgekehrt proportional zum Reibungskoeffizienten, $\tau \propto \frac{1}{\gamma}$.

Für freie Ladungsträger mit Dichte $\rho \equiv \rho_f$ ist die Ladungsstromdichte $\vec{j} \equiv \vec{j}_f$:

$$\vec{j} = \rho \cdot \dot{\vec{x}} \equiv n_0 \cdot q \cdot \dot{\vec{x}}, \quad n_0 = \text{Dichte der Ladungen } q,$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n_0 q} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = q\vec{E} - \frac{m}{n_0 \cdot q \cdot \tau} \vec{j}.$$

Im **stationären Fall** $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0$ ist mit $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ die **statische Leitfähigkeit**

$$\boxed{\sigma_0 = \frac{n_0 \cdot q^2 \cdot \tau}{m}}$$

Die Bewegungsgleichung wird dann nach Multiplikation mit $\frac{n_0 \cdot q \cdot \tau}{m}$

$$\tau \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{n_0 \cdot q \cdot \tau}{m} \vec{E} - \vec{j},$$

lässt sich mit der statischen Leitfähigkeit σ_0 also schreiben als

$$\boxed{\tau \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \sigma_0 \vec{E} - \vec{j}}$$

Für eine periodische Zeitabhängigkeit $\vec{j} = \vec{j}_0 e^{-i\omega t}$, $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ folgt

$$(1 - i\omega\tau)\vec{j}_0 = \sigma_0 \vec{E}_0$$

bzw.

$$\vec{j}_0 = \sigma(\omega) \vec{E}_0, \quad \sigma(\omega) \equiv \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau},$$

und die komplexe Dielektrizitätskonstante wird mit der frequenzabhängigen Leitfähigkeit

$$\boxed{\varepsilon(\omega) = \varepsilon - \frac{4\pi\sigma_0}{i\omega(1 - i\omega\tau)}}$$

Bei **niedrigen Frequenzen** $\omega\tau \ll 1$ gilt näherungsweise das gleiche Ergebnis wie für frequenzunabhängige Leitfähigkeit mit $\sigma \rightarrow \sigma_0$; bei **hohen Frequenzen** $\omega\tau \gg 1$ folgt

$$\varepsilon(\omega) \simeq \varepsilon - \frac{4\pi\sigma_0}{\tau\omega^2} = \varepsilon - \frac{4\pi n_0 q^2}{m\omega^2} = \varepsilon \left(1 - \frac{4\pi n_0 q^2}{\varepsilon m \omega^2} \right) = \varepsilon \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

mit der sogenannten **Plasmafrequenz**

$$\boxed{\omega_p = \left[\frac{4\pi n_0 q^2}{\varepsilon m} \right]^{1/2}}$$

Für Frequenzen **unterhalb** der Plasmafrequenz, $\omega < \omega_p$, wird $\varepsilon(\omega)$ negativ, d. h. $\sqrt{\varepsilon(\omega)} = n + i\kappa$ ist rein imaginär mit $n = 0$ und

$$\kappa = \left[\varepsilon \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 \right) \right]^{1/2},$$

die Welle ist mit $e^{-\omega\kappa z/c}$ **exponentiell gedämpft**, es gibt keinen oszillierenden Anteil. Für Frequenzen **oberhalb** der Plasmafrequenz, $\omega > \omega_p$, ist $\varepsilon > 0$, d. h. $\sqrt{\varepsilon(\omega)} = n$ ist reell ($\kappa = 0$) mit

$$n = \left[\varepsilon \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \right]^{1/2}$$

Bei diesen hohen Frequenzen gibt es **keine Dämpfung**, der Leiter wird transparent.

Bei **Kupfer** ist $\frac{1}{\tau} = 3,7 \cdot 10^{13}/s$, $\sigma_0 = 5,8 \cdot 10^{17}/s$, $\omega_p = 1,6 \cdot 10^{16}/s$.

Sichtbares Licht ist im Frequenzbereich $\omega = (2,4 - 5,2) \cdot 10^{15}/s$, d. h. $\omega < \omega_p$: Kupfer ist undurchsichtig, jedoch transparent für harte Röntgenstrahlen.

In **Elektrolyten** ist dagegen die Ladungsträgerdichte n_0 kleiner und m größer, so dass die Plasmafrequenz niedriger ist \Rightarrow Elektrolyte sind wegen $\omega > \omega_p$ in der Regel durchsichtig.

Plasmaschwingungen

Für $\omega = \omega_p$ ist $\varepsilon(\omega) = 0$, so dass die Gleichung $\varepsilon(\omega)\vec{\nabla}\vec{E}_0 = 0$ **longitudinale elektrische** Wellen zulässt

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{i(k_z z - \omega_p t)}; \quad \vec{B} = 0.$$

Sie entsprechen Schwingungen der Ladungsträger **ohne** Reibung, d. h. ungedämpften Schwingungen des \vec{E} -Feldes in Richtung der Wellenausbreitung: Dies sind die **Eigenschwingungen** eines Plasmas; die Plasmaschwingung in einem Metall ist eine kollektive longitudinale Anregung des Leitungselektronengases.

6.3.2 Elektromagnetische Wellen in Hohlleitern

Für $\varrho(\vec{x}, t) = 0$, $\vec{j}(\vec{x}, t) = 0$, und $\varepsilon = \mu = 1$ (Vakuum) im Innern eines Hohlleiters (Abb. 6.6) gelten die freien Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0. \end{aligned}$$

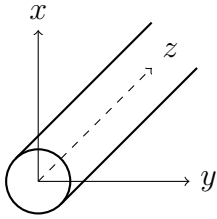


Abb. 6.6 Hohlleiter

Die freien Maxwell-Gleichungen sind symmetrisch bezüglich der Vertauschung $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ und $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$, siehe Abschn. 6.1. Dementsprechend gilt der Ansatz für \vec{E} - und \vec{B} -Feld

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0(\vec{x}, t)e^{i(k_z z - \omega t)},$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}_0(\vec{x}, t)e^{i(k_z z - \omega t)}.$$

Die Bestimmung der x - und y -Komponenten der Felder lässt sich auf die Bestimmung der z -Komponenten zurückführen. Einsetzen in die Maxwell-Gleichungen ergibt vier gekoppelte Gleichungen für $E_{0x}, E_{0y}, B_{0x}, B_{0y}$. Daraus folgt durch Linearkombination, und mit $k_{\perp}^2 := \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2$ eine Relation zwischen den (x, y) - und z -Komponenten:

$$k_{\perp}^2(\vec{e}_x E_{0x} + \vec{e}_z E_{0y}) = ik_z \vec{\nabla} E_{0z} - i\frac{\omega}{c} \vec{e}_z \times \vec{\nabla} B_{0z},$$

$$k_{\perp}^2(\vec{e}_x B_{0x} + \vec{e}_y B_{0y}) = ik_z \vec{\nabla} B_{0z} + i\frac{\omega}{c} \vec{e}_z \times \vec{\nabla} E_{0z}.$$

Die Gleichungen für die z -Komponenten folgen durch Einsetzen der Ansätze in die Wellengleichungen $\square \vec{E} = 0, \square \vec{B} = 0$ als

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_{\perp}^2 \right) E_{0z}(x, y) &= 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_{\perp}^2 \right) B_{0z}(x, y) &= 0. \end{aligned}}$$

Zur Lösung sind die **Randbedingungen** auf dem Hohlleiter erforderlich: $\vec{E}_{\parallel} = 0, \vec{B}_{\perp} = 0$ auf dem Rand, d. h. $\vec{E} \cdot \vec{B}|_{\text{Rand}} = 0$

Beachte: Wellenausbreitung im Hohlleiter findet wegen $k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_{\perp}^2 > 0$ nur **oberhalb einer kritischen Frequenz** statt, $\omega > \omega_{cr} = ck_{\perp}$.

Transversal elektrische Wellen im Hohlleiter (TE-Moden)

Das \vec{E} -Feld steht senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung der Hohlraumwelle, $E_{0z} = 0$.

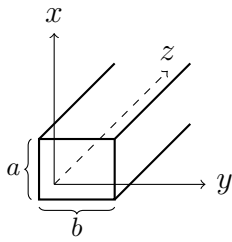


Abb. 6.7 Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt

Beispiel: Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt (Abb. 6.7), Seitenlänge a, b

$E_{0z} = 0$ im gesamten Hohlraum, $E_{\parallel} = 0$ auf dem Rand

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + k_{\perp}^2) B_{0z}(x, y) = 0$$

Separationsansatz: $B_{0z}(x, y) = g_1(x)g_2(y)$

\Rightarrow Differenzialgleichung 2. Ordnung für g_1, g_2 ; Lösungsansätze:

$$g_1(x) = B_0 \cos(c_1 x + \varphi_1)$$

$$g_2(y) = \cos(c_2 y + \varphi_2)$$

Zur Erfüllung der Randbedingungen muss $\vec{\nabla} B_{0z} = 0$ auf dem Rand gelten:

$$\vec{\nabla} B_{0z} = \begin{pmatrix} g_1'(x)g_2(y) \\ g_1(x)g_2'(y) \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{auf dem Rand,}$$

$$g_1'(0) = g_1'(a) = 0,$$

$$g_2'(0) = g_2'(b) = 0.$$

\Rightarrow Lösung für die z -Komponente:

$$\boxed{B_{0z}(x, y) = B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)} \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad m \geq 0, \quad n \geq 0, \quad m + n \geq 1$$

mit $k_{\perp}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$, kritische Frequenz: $\omega_{cr} = \frac{c\pi}{\max\{a, b\}}$.

Analog **TM-Moden** mit $B_{0z} = 0$,

$$E_{0z}(x, y) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

6.4 Wellenpakete

Die bisherige Beschreibung galt für ebene monochromatische Wellen zu festem $|\vec{k}|$ bzw. fester Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ (einfarbig). Signale werden jedoch durch **Wellenpakete** übertragen, die aus unterschiedlichen **Fourier-Komponenten** mit einer Verteilung der Wellenvektoren entsprechend $f(\vec{k})$ bestehen, s. Abschn. 6.3.

Bei Ausbreitung der Welle in z -Richtung wird der Vektor des elektrischen Feldes mit $\vec{k} \equiv (0, 0, k_z)$

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x, y) \int_{-\infty}^{\infty} dk_z f(k_z) e^{i[k_z z - \omega(k_z)t]} .$$

Die Verteilungsfunktion $f(k_z)$ hat bei $k_z = k_z^0$ ein Maximum und fällt für andere k_z -Werte rasch ab (Abb. 6.8).

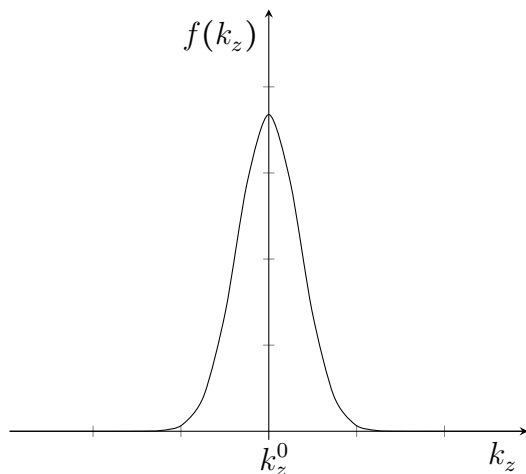


Abb. 6.8 Verteilungsfunktion der Wellenvektoren im Wellenpaket

Eine Entwicklung von $\omega(k_z)$ um k_z^0 ergibt:

$$\omega(k_z) = \omega(k_z^0) + \left. \frac{d\omega(k_z)}{dk_z} \right|_{k_z=k_z^0} (k_z - k_z^0) + \dots$$

mit **Gruppengeschwindigkeit** $\frac{d\omega}{dk_z} \equiv u$, d. h. die (Signal-)Geschwindigkeit, mit der sich das ganze Wellenpaket bewegt (s. Abschn. 6.3). In linearer Näherung ist demnach

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x, y) e^{i[k_z^0 z - \omega(k_z^0)t]} \cdot f(z - ut) \quad \text{mit} \quad f(z - ut) = \int dk_z f(k_z) e^{i(k_z - k_z^0)(z - ut)} .$$

Die **Phase** im Vorfaktor ist

$$\varphi = k_z^0 \cdot z - \omega(k_z^0) \cdot t ;$$

sie bewegt sich mit der **Phasengeschwindigkeit**

$$v_{ph} = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{\varphi} = \frac{\omega(k_z^0)}{k_z^0} \equiv \hat{c} .$$

Die z -Abhängigkeit der **Amplitude** steckt in der Funktion $f(z - ut)$: Das Wellenpaket bewegt sich mit der **Gruppengeschwindigkeit** u in (positive) z -Richtung.

Bei **Hohlleitern** mit $\omega = c\sqrt{k_z^2 + k_\perp^2}$, $k_\perp^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$ gilt für Wellenpakete:

$$v_{ph} = c \frac{\sqrt{(k_z^0)^2 + k_\perp^2}}{k_z^0} > 0,$$

$$u = c \frac{k_z^0}{\sqrt{(k_z^0)^2 + k_\perp^2}} < 0.$$

Beispiel: Gauß'sches Wellenpaket

Ist die Welle mit einer Gaußfunktion moduliert,

$$f(k_z) = e^{-\frac{(k_z - k_z^0)^2}{(2/a)^2}},$$

lässt sich das Integral zum Zeitpunkt $t = 0$ analytisch lösen,

$$\vec{E}(\vec{x}, t = 0) = \vec{E}_0(x, y) \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{-\frac{(k_z - k_z^0)^2}{(2/a)^2}} e^{ik_z z} = \vec{E}_0(x, y) \cdot \underbrace{\sqrt{4\pi/a^2} \cdot e^{-z^2/a^2}}_{\equiv A(z)},$$

d. h. es ergibt sich eine **Gauß-Funktion im Ortsraum**, in der Ausbreitungsrichtung der Welle: Die Amplitude der Welle ist nur noch in einem bestimmten Bereich deutlich von Null verschieden (Abb. 6.9). Mathematisch gesprochen: Die Fourier-Transformation einer Gauß-Funktion (\equiv die Frequenzverteilung im k -Raum) ergibt wieder eine Gauß-Funktion (= die Amplitudenverteilung im Ortsraum).

Dargestellt ist der Realteil von $\psi(z) = \sqrt{4\pi/a^2} e^{-z^2/a^2} e^{ik_z^0 z}$ mit $a = 4$, $k_z^0 = 8$ in dimensionslosen Einheiten.

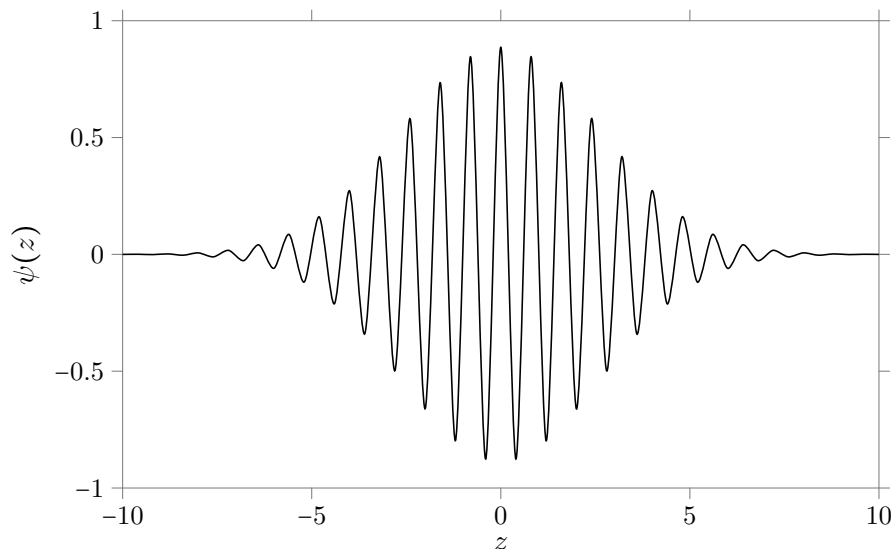


Abb. 6.9 Ausbreitung eines Wellenpakets in z -Richtung

Bei **Dispersion** ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle frequenzabhängig – z. B. bei Licht in Materie – und das Wellenpaket zerläuft, d. h. die räumliche Breite wächst mit der Zeit, die Unbestimmtheit (in der Lokalisierung; z. B. bei Wellenpaketen, die ein Teilchen darstellen) wird größer.

Wellenpakete **ohne Dispersion** behalten ihre Form; man nennt sie **Solitonen**.

Elektromagnetische Wellen breiten sich über einen großen Wellenlängenbereich von wenigen Zentimetern bis zu einigen Kilometern (Frequenzbereich 20 kHz – 2 GHz) mit konstanter Geschwindigkeit aus, es gibt dort keine Dispersion und demnach kein Zerlaufen der Wellenpakete.

Beispiel: Kurze Spannungsimpulse durchlaufen ein Koaxialkabel, werden am offenen Ende reflektiert und laufen zurück, ohne dass ihre Form sich ändert. Ohm'sche Verluste bewirken jedoch eine gewisse Amplitudenabnahme.

Fourier-Transformation

Bei der Darstellung des Wellenpaketes als Integral über eine Verteilungsfunktion im \vec{k} -Raum haben wir die Fourier-Transformation benutzt, die sich für eine quadratintegrale Funktion $f(\vec{x})$ allgemein darstellen lässt als

$$f(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

mit der Fourier-Transformierten $\tilde{f}(\vec{k})$, für die gilt:

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int d^3x f(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}.$$

Die (inverse) Fourier-Transformation von $\tilde{f}(\vec{k})$ ergibt wieder die Ausgangsfunktion; die Delta-Distribution ist dabei

$$\delta^3(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}.$$

Die Fourier-Transformation ist hier eine **unitäre Abbildung** vom Ortsraum (\vec{x}) in den \vec{k} -Raum. Analog gibt es eine kontinuierliche Fourier-Transformation vom t -Raum in den Frequenzraum,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} \quad \text{und} \quad \tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{+i\omega t}.$$

Allgemein lässt sich jedes Wellenprofil aus monochromatischen Wellen zu festem \vec{k} und $\omega = c|\vec{k}|$ durch vierdimensionale Fourier-Transformation erzeugen, (s. Abschn. 6.1)

$$f(x^\mu) = \int \frac{d^4 k^\mu}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k^\mu) e^{-ik_\mu x^\mu}$$

mit $k_\mu x^\mu = \omega t - \vec{k}\vec{x}$.

6.5 Reflexion und Brechung an Grenzflächen

Trifft eine elektromagnetische Welle auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien wird in der Regel ein Teil reflektiert; der Rest dringt im Medium ein (Abb. 6.10). Die Medien sind durch (ε_1, μ_1) und (ε_2, μ_2) charakterisiert. Die Grenzfläche ist bei $z = 0$, der Wellenvektor der einfallenden Welle ist \vec{k}_1 , der reflektierten \vec{k}_1^r und der transmittierten \vec{k}_2 . Die Winkel der Wellenvektoren mit dem Normalenvektor \vec{e}_z sind α, β, γ (Abb. 6.10).

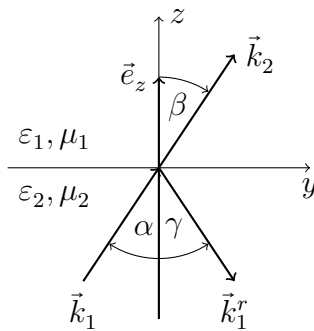


Abb. 6.10 Reflexion und Brechung an Grenzflächen

Sofern es keine Flächenladungen an der Grenzfläche der beiden Medien gibt, sind die Normalkomponenten D_\perp , B_\perp von \vec{D} und \vec{B} stetig an der Grenzfläche und die Tangentialkomponenten E_\parallel , H_\parallel von \vec{E} und \vec{H} ebenfalls stetig an der Grenzfläche.

Die einfallende Welle ist gegeben durch

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_1^0 e^{i(\vec{k}_1 \vec{x}_1 - \omega_1 t)}$$

sowie mit der Dispersionsrelation für nichtleitende Medien $k_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \frac{\omega}{c}$

$$\Rightarrow \vec{B}_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \frac{\vec{k}_1 \times \vec{E}_1}{k_1} \quad (\text{s. Abschn. 6.1 und 6.3}).$$

Die reflektierte Welle wird

$$\vec{E}_{1r} = \vec{E}_{1r}^0 e^{i(\vec{k}_{1r} \vec{x}_{1r} - \omega_{1r} t)}, \quad \vec{B}_{1r} = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \frac{\vec{k}_{1r} \times \vec{E}_{1r}}{k_{1r}},$$

und die ins Medium 2 eindringende Welle

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_2^0 e^{i(\vec{k}_2 \vec{x}_2 - \omega_2 t)}, \quad \vec{B}_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \frac{\vec{k}_2 \times \vec{E}_2}{k_2}.$$

Aus den Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche

$$\begin{aligned} E_{\parallel}^1 &= E_{\parallel}^2, & H_{\parallel}^1 &= H_{\parallel}^2, \\ D_{\perp}^1 &= D_{\perp}^2, & B_{\perp}^1 &= B_{\perp}^2, \end{aligned}$$

folgt, dass $\forall t$ die Phasenfaktoren bei $z = 0$ gleich sein müssen:

$$e^{i(\vec{k}_1 \vec{x}_2 - \omega_1 t)} = e^{i(\vec{k}_2 \vec{x}_2 - \omega_2 t)} = e^{i(\vec{k}_{1r} \vec{x} - \omega_{1r} t)},$$

so dass

$$\vec{k}_1 \vec{x} - \omega_1 t = \vec{k}_2 \vec{x} - \omega_2 t + 2\pi m_2 = \vec{k}_{1r} \vec{x} - \omega_{1r} t + 2\pi m_1 \quad \text{mit} \quad m_1, m_2 \in \mathbb{Z}.$$

Insbesondere muss dies gelten für $m_{1r} = m_2 = 0$ und bei $\vec{x} = 0$ (dort trifft die Welle auf die Grenzschicht):

$$\Rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \omega_{1r} \equiv \omega.$$

Die Frequenz bleibt bei Brechung und Reflexion gleich.

Wegen $\vec{k}_1 \vec{x} = \vec{k}_2 \vec{x} = \vec{k}_{1r} \vec{x}$ liegen $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_{1r}$ in einer Ebene (= Einfallsebene). Für einen (beliebigen) Punkt auf der y -Achse $\vec{x} = y \cdot \vec{e}_y$ ergibt das

$$k_1 y \sin \alpha = k_{1r} y \sin \gamma = k_2 y \sin \beta,$$

und mit der Gleichheit der Frequenzen folgt

$$k_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} = k_{1r}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2},$$

sowie

$$\boxed{\sin \alpha = \sin \gamma \Rightarrow \alpha = \gamma, \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \cdot \mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1 \cdot \mu_1}} = \frac{n_2}{n_1}}$$

oder

$$\boxed{\alpha = \gamma, \quad n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta}.$$

Es gilt Einfallswinkel = Austrittswinkel bei Reflexion mit den Brechungsindizes $n_k = \sqrt{\varepsilon_k \mu_k}$, $k = 1, 2$. Dies ist das **Snellius'sche³⁹ Brechungsgesetz**.

³⁹Willebrord van Roijen Snell (oder Snellius; *1580 Leiden, +1626 Leiden), niederländischer Astronom und Mathematiker.

Literatur

- [1] Simonyi, K.: Theoretische Elektrotechnik. 10. Aufl., J. A. Barth, Ed. Dt. Verl. der Wiss., Berlin, Leipzig, Heidelberg (1993)
- [2] Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M.: The Feynman Lectures on Physics, Bd. II, Kap. 32. Addison-Wesley, Reading (1966)
- [3] Schwab, A. J.: Begriffswelt der Feldtheorie. 6. Aufl., Springer, Berlin, Heidelberg (2002)

7 Felder bewegter Ladungen – elektrodynamische Potenziale

7.1 Inhomogene Wellengleichungen und Green-Funktion

Zur Beschreibung **bewegter Ladungen** mit Ladungsdichten $\varrho(\vec{x}, t)$ und Stromdichten $\vec{j}(\vec{x}, t)$ müssen wir eine **inhomogene Wellengleichung** lösen,

$$\boxed{\square A^\mu = +\frac{4\pi}{c} j^\mu} \quad \text{mit} \quad \square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2.$$

Sie folgt aus den Maxwell-Gleichungen mit Quellen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

analog zur homogenen Wellengleichung

$$\square A^\mu \equiv \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = 0,$$

die aus den Maxwell-Gleichungen im Vakuum

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

in der Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ der Potenziale folgt.

Das Problem lässt sich mithilfe der **Green'schen Funktion** lösen. Anders als in der Elektrostatik hängt sie bei dynamischen Problemen jedoch von Ort und Zeit ab:

$$\boxed{\square G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = +4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t')},$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = +4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t'),$$

d. h., der d'Alembert-Operator wirkt nur auf die ungestrichenen Koordinaten. (G entspricht dem Potenzial einer in Raum und Zeit punktförmigen Quelle.) Ist die Green-Funktion bekannt, folgt die Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\square A^\mu = +\frac{4\pi}{c} j^\mu$$

als

$$\boxed{A^\mu(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' dt' G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \cdot j^\mu(\vec{r}', t')},$$

denn

$$\begin{aligned}\square A^\mu(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \int d^3 r' dt' \square G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \cdot j^\mu(\vec{r}', t') \\ &= +\frac{4\pi}{c} \int d^3 r' dt' \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') j^\mu(\vec{r}', t') \\ &= +\frac{4\pi}{c} j^\mu(\vec{r}, t).\end{aligned}$$

7.2 Bestimmung der Green-Funktion mit funktionentheoretischen Methoden

Wir stellen zunächst die Deltafunktionen in \vec{r} und t durch ihre Fouriertransformierten dar:

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}')}, \quad \delta(\vec{t} - \vec{t}') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')},$$

und analog die Green'sche Funktion

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 k \int d\omega \tilde{G}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}')} e^{-i\omega(t-t')}$$

mit der Fourier-Transformierten $\tilde{G}(\vec{k}, \omega)$. Wir wenden nun den d'Alembert-Operators auf G an und erhalten

$$\begin{aligned}\square G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 k \int d\omega \tilde{G}(\vec{k}, \omega) \cdot \left(\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \cdot e^{i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}')} \cdot e^{-i\omega(t-t')} \\ &\equiv +4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t').\end{aligned}$$

Durch Vergleich mit den Fouriertransformierten der Deltafunktionen folgt

$$\tilde{G}(\vec{k}, \omega) \cdot \left(\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 4\pi,$$

die Fourier-Transformierte der Green-Funktion wird

$$\boxed{\tilde{G}(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}},$$

und die Green'sche Funktion ist dementsprechend

$$\boxed{G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 k \int d\omega \frac{4\pi c^2}{\vec{k}^2 c^2 - \omega^2} e^{i[\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}') - \omega(t-t')]}.$$

Sie beschreibt den Effekt einer Ladung am Ort \vec{r}' zur Zeit t' auf den Punkt \vec{r} zur Zeit t .

Aus Kausalitätsgründen muss $t \geq t'$ sein, so dass $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = 0$ für $t < t'$: Die Ladung zur Zeit t' wirkt auf Zeiten $t \geq t'$, und die Bestimmung von G mit **funktioentheoretischen Methoden** soll diese Bedingung berücksichtigen. Bei gegebenem Viererstrom j^μ folgt dann das Viererpotenzial A^μ wie beschrieben.

Setze in der Green-Funktion zur Vereinfachung $\vec{R} := \vec{r} - \vec{r}'$, $\tau := t - t'$

$$G(\vec{R}, \tau) = \int d^3k \int d\omega \frac{c^2}{4\pi^3} \frac{1}{k^2 c^2 - \omega^2} e^{i(\vec{k}\vec{R} - \omega\tau)}$$

und betrachte zunächst die \vec{k} -Integration; $\vartheta = \sphericalangle(\vec{R}, \vec{k})$

$$\begin{aligned} I &:= \int d^3k \frac{e^{i\vec{k}\vec{R}}}{k^2 c^2 - \omega^2} = \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dk k^2 \frac{e^{ikR \cos \vartheta}}{k^2 c^2 - \omega^2} \\ &= 2\pi \int_0^\infty dk k^2 \frac{e^{ikR} - e^{-ikR}}{ikR} \frac{1}{(kc + \omega)(kc - \omega)} \\ &= \frac{2\pi}{iR} \int_{-\infty}^\infty dk k \frac{e^{ikR}}{(kc + \omega)(kc - \omega)}, \end{aligned}$$

da das Integral symmetrisch bei Vertauschung $k \rightarrow -k$ ist. Mit

$$\frac{2kc}{(kc + \omega)(kc - \omega)} = \frac{1}{kc + \omega} + \frac{1}{kc - \omega}$$

wird

$$I \equiv \frac{\pi}{iRc} I_1 = \frac{\pi}{iRc} \int_{-\infty}^\infty dk e^{ikR} \left[\frac{1}{kc + \omega} + \frac{1}{kc - \omega} \right].$$

Das Integral I_1 hat **zwei Pole** bei $k = \pm \frac{\omega}{c}$. Wir lösen es durch **Konturintegration** in der komplexen k -Ebene (Abb. 7.1) mit

$$k = \text{Re}(k) + i\text{Im}(k), \quad e^{ikR} = e^{iR\text{Re}(k)} e^{-R\text{Im}(k)}.$$

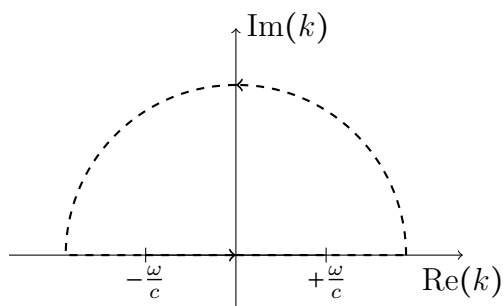


Abb. 7.1 Konturintegration in der komplexen Ebene

Ein Integral über einen geschlossenen Weg in der komplexen Ebene **verschwindet**, wenn **keine** Pole eingeschlossen sind. Liegen Pole im umschlossenen Bereich, lässt sich das Integral nach dem **Residuensatz** auswerten. Wir verwenden hier die entsprechenden Definitionen und Sätze aus der Theorie der komplexen Funktionen.

Residuum

Hat eine analytische⁴⁰ (differenzierbare) Funktion $f(z)$ mit $z \in \mathbb{C}$ in $z = a$ eine isolierte, einfache Singularität, dann heißt der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) =: \text{Res}[f(z); z_0],$$

das **Residuum** erster Ordnung von $f(z)$ bei a .

Beispiel: Sei $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$; einfacher Pol in $z = \pm ia$

$$\text{Res}[f(z); +ia] = \lim_{z \rightarrow ia} \left[(z - ia) \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} \right] = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{e^{iz}}{z + ia} = \frac{e^{-a}}{2ia}$$

analog ist $\text{Res}[f(z); -ia] = -\frac{e^a}{2ia}$.

Cauchy'scher Integralsatz

Sei $f(z)$ analytisch (holomorph) auf $G \subset \mathbb{C}$ und C eine einfach geschlossene Kurve, dann ist

$$\oint_C dz f(z) = 0.$$

Residuensatz

Sei $f(z)$ eine auf $G \subset \mathbb{C}$ außer in endlich vielen Punkten a_1, a_2, \dots, a_N analytische Funktion und C eine geschlossene, stückweise glatte Kurve, die ganz in G liegt und die Singularitäten a_k umschließt, dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C d\xi f(\xi) = \sum_{k=1}^N \text{Res}[f(z); a_k].$$

Anwendung auf die Berechnung bestimmter Integrale:

Ist $f(z)$ für $\text{Im}(z) \geq 0$ (obere Halbebene) mit Ausnahme endlich vieler singulärer Punkte a_1, \dots, a_N analytisch und ist $z = \infty$ eine mindestens 2-fache Nullstelle von $f(z)$, so ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}[f(z); a_k].$$

⁴⁰Eine analytische Funktion ist lokal durch eine konvergente Potenzreihe gegeben. Im Komplexen sind die Eigenschaften **analytisch** und **holomorph** äquivalent.

Beispiel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow -i} \left[(z-i) \frac{1}{1+z^2} \right] = 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow -i} \frac{1}{z+i} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi$$

(Beachte: der singuläre Punkt $z = -i$ liegt in der **unteren** Halbebene \Rightarrow sein Residuum wird nicht berücksichtigt.)

Berechnung des Integrals I_1

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikR} \left[\frac{1}{kc + \omega} + \frac{1}{kc - \omega} \right]; \quad I = \frac{\pi}{iRc} \cdot I_1$$

Die Anteile zum Integral I_1 in der komplexen Ebene gehen wegen $e^{-R \cdot \text{Im}(k)}$ gegen Null, wenn das Integral in der **oberen** Halbebene geschlossen wird (denn dort ist $\text{Im}(k) > 0$). Das Integral ist dann gleich seinem Wert längs der reellen Achse.

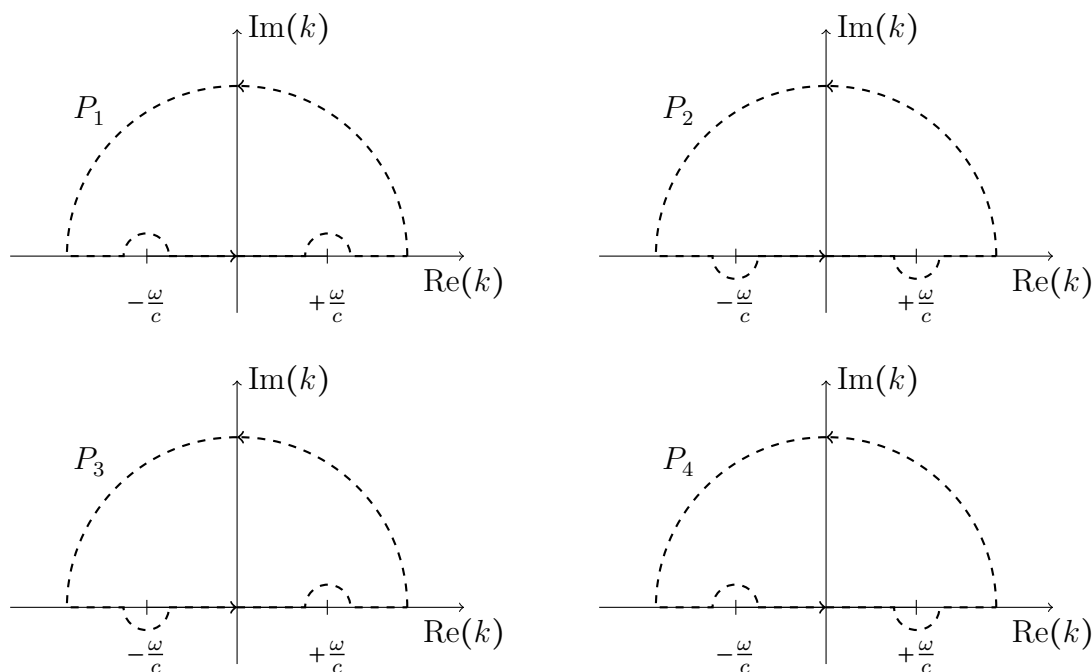


Abb. 7.2 Integrationswege in der komplexen Ebene

Die Pole bei $k = \pm \frac{\omega}{c}$ werden in der komplexen Ebene oberhalb oder unterhalb umgangen (Abb. 7.2). Wegen der Symmetrie des Integrals zwischen $+k$ und $-k$ soll jeweils entweder der eine **oder** der andere Pol im Integrationsgebiet liegen (die Integration läuft längs der reellen Achse vom negativen in den positiven Bereich, die Pole werden wechselseitig

umlaufen). Es ist für den Weg längs

$$P_1: I_1 = 0, \quad (\text{wegen des Cauchy'schen Integralsatzes})$$

$$P_2: I_1 = \frac{2\pi i}{c} [e^{-i\frac{\omega}{c}R} + e^{+i\frac{\omega}{c}R}], \quad (\text{entfällt, da beide Pole umschlossen})$$

$$\boxed{P_3: I_1 = \frac{2\pi i}{c} e^{-i\frac{\omega}{c}R}, \quad \left(k = -\frac{\omega}{c}\right)}$$

$$\boxed{P_4: I_1 = \frac{2\pi i}{c} e^{+i\frac{\omega}{c}R}. \quad \left(k = +\frac{\omega}{c}\right)}$$

Für die Gesamt-Green-Funktion folgt

$$\begin{aligned} G(\vec{R}, \tau) &= \frac{c^2}{4\pi^3} \cdot \frac{\pi}{iRc} \cdot \frac{2\pi i}{c} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega\tau} \cdot e^{\pm i\frac{\omega}{c}R} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(\tau \mp \frac{R}{c})} = \frac{1}{R} \cdot \delta\left(\tau \mp \frac{R}{c}\right) \end{aligned}$$

bzw.

$$\boxed{G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t - t' \mp \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}.$$

⇒ Die Green-Funktion ist nur für $t' = t \mp |\vec{r} - \vec{r}'|/c$ von Null verschieden.

Zur **avancierten** Green'schen Funktion mit $t' = t + |\vec{r} - \vec{r}'|/c$ trägt nur $t' > t$ bei ⇒ der Beitrag zum Potenzial $A^\mu(\vec{r}, t)$ hängt von $j^\mu(\vec{r}', t')$ zu **späterer** Zeit ab ⇒ es wird eine Wirkung in die Vergangenheit beschrieben, die in der Regel unphysikalisch ist, jedoch in der relativistischen Quantenfeldtheorie eine Rolle spielt.

Die **retardierte** Green'sche Funktion mit $t' = t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$ ist die – in der klassischen Elektrodynamik – physikalisch relevante Lösung; die Wirkung breitet sich von (\vec{r}', t') nach (\vec{r}, t) mit Lichtgeschwindigkeit aus (d. h. in die Zukunft – s. Minkowski-Diagramm). Wegen der **Verzögerung** der Wirkung heißt die Lösung **retardiert**. Die Laufzeit ist $|\vec{r} - \vec{r}'|/c$.

Mit der Green-Funktion folgt das retardierte Viererpotenzial $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$ aus dem Integral über den Viererstrom $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$:

$$\boxed{A^\mu(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{j^\mu\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}$$

bzw. getrennt für skalares Potenzial und Vektorpotenzial:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int d^3r' \frac{\varrho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}.$$

Die Wirkung von Ladungen ϱ und Strömen \vec{j} ist demnach umso mehr verzögert, je weiter sie vom Ausgangspunkt \vec{r}' entfernt ist. Durch die endliche Laufzeit elektromagnetischer Information hängt also das Potenzial – und damit die Kraft auf ein Teilchen bei (\vec{r}, t) – von der Position des Teilchens zu früheren Zeiten $t' = t - R(t')/c$ ab.

Für die **allgemeine Lösung** des Problems muss zur speziellen Lösung, die wir mit Hilfe der Green-Funktion gefunden haben noch die homogene Lösung (Überlagerung von ebenen Wellen) addiert werden.

7.3 Liénard-Wiechert-Potenziale für bewegte Punktladungen

Als Folge der Retardierung sind die elektrodynamischen Potenziale im allgemeinen Fall schwer zu berechnen: Man muss über Ladungen und Ströme auf dem Rückwärtslichtkegel des Ereignisses bei (\vec{r}, t) integrieren, um das Potenzial am Ort \vec{r} zu erhalten.

Für **bewegte Punktladungen** q , deren Trajektorie (Bahn) $\vec{r}_q(t)$ man kennt, lassen sich die Potenziale jedoch exakt berechnen⁴¹. Obwohl sie vor der Formulierung der speziellen Relativitätstheorie abgeleitet wurden, erweisen sie sich wie die Maxwell-Gleichungen als relativistisch invariant [2]. Sie sind jedoch nicht für die Beschreibung von Quantenphänomenen (z. B. zur Berechnung der Bahn eines Elektrons im Atom ohne Strahlungsemission) geeignet – das erfordert vielmehr eine quantentheoretische Beschreibung.

Ladungs- und Stromdichte des auf der Trajektorie $\vec{r}_q(t)$ bewegten Punktteilchens sind gegeben durch

$$\varrho(\vec{r}, t) = q \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_q(t)), \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = q \vec{v}(t) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_q(t)).$$

Einsetzen in

$$A^\mu(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' dt' G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') j^\mu(\vec{r}', t')$$

mit der Green-Funktion

$$G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)$$

⁴¹ Alfred-Marie Liénard (*1869 Amiens, +1958 Paris), 1898 und Emil Wiechert (*1861 Tilsit, +1928 Göttingen), 1900 haben die Potenziale unabhängig voneinander berechnet.

ergibt für das skalare Potenzial mit $j^0 = c\rho$

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int d^3r' \int dt' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) q \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_q(t')).$$

Das Resultat der \vec{r}' -Integration ist

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int dt' \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t')|} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q(t')|}{c}\right).$$

Substituiere

$$w \equiv t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q(t')|}{c} = t' - t + \frac{1}{c} [(x - x_q(t'))^2 + (y - y_q(t'))^2 + (z - z_q(t'))^2]^{1/2};$$

die Ableitung nach t' wird dann

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt'} &= 1 - \frac{1}{c|\vec{r} - \vec{r}_q(t')|} [(x - x_q)\dot{x}_q + (y - y_q)\dot{y}_q + (z - z_q)\dot{z}_q] \\ &= 1 - \frac{[\vec{r} - \vec{r}_q(t')] \dot{\vec{r}}_q(t')}{c|\vec{r} - \vec{r}_q(t')|} \equiv 1 - \frac{\vec{n}(t')\vec{v}(t')}{c} \end{aligned}$$

mit dem Einheitsvektor der Ladung zum betrachteten Punkt \vec{r} , $\vec{n} := \frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|}$. Multiplikation der Gleichung mit dt' ergibt $dw = \left(1 - \frac{\vec{n}(t')\vec{v}(t')}{c}\right) dt'$, und das skalare Potenzial wird [3, 4]

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int \frac{dw}{1 - \frac{\vec{n}(t'(w))\vec{v}(t'(w))}{c}} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t'(w))|} \delta(w(t')).$$

\Rightarrow Nur $w = 0$ trägt bei

$$\Rightarrow \boxed{\Phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|} \frac{1}{1 - \frac{\vec{n}(t_r)\vec{v}(t_r)}{c}}}.$$

Dabei bedeutet $w = 0$ für die ursprüngliche Integrationsvariable t'

$$t' = w + t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q(t')|}{c} \xrightarrow{w=0} t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|}{c}.$$

Die Ladung q bestimmt demnach das Potenzial $\Phi(\vec{r}, t)$ aufgrund ihrer früheren Bewegung und Position zu retardierten Zeiten $t_r < t$.

Analog folgt das Liénard-Wiechert'sche Vektorpotenzial [3, 4]

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q\vec{v}(t_r)}{c|\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|} \frac{1}{1 - \vec{n}(t_r)\vec{v}(t_r)/c} \Bigg|_{t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|}{c}}.$$

Dies sind die – bis auf Quanteneffekte – exakten Potenziale für bewegte Ladungen.

Mit den Abkürzungen (implizite Gleichungen)

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_q(t_r), \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}(t_r)}{c};$$

$$t_r = t - \frac{R(t_r)}{c}, \quad R = c|t - t_r| \equiv |\vec{R}|$$

lassen sich die Liénard-Wiechert-Potenziale vereinfacht schreiben als

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi(\vec{r}, t) &= \frac{qc}{Rc - \vec{R}\vec{v}} = \frac{q}{R - \vec{R}\vec{\beta}} \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{q\vec{v}}{Rc - \vec{R}\vec{v}} = \frac{q\vec{\beta}}{R - \vec{R}\vec{\beta}} \end{aligned}} \quad \vec{\beta} \equiv \vec{v}(t_r)/c, \quad \vec{A} = \vec{\beta}\Phi.$$

Das elektrische und magnetische Feld können wir aus diesen Potenzialen bestimmen

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

(Oder auch aus der unintegrierten Form der Potenziale, s. Abschn. 7.4.)

Die – im allgemeinen Fall sehr umfangreiche – Berechnung der Felder ergibt jeweils zwei Terme; der erste beschreibt Nahfeldeffekte der Ladung bei gleichförmiger Bewegung und berücksichtigt die zur Lorentz-Invarianz erforderlichen Retardierungseffekte; er ist $\propto 1/R^2$. Der zweite Term erscheint nur bei **beschleunigter** Bewegung und beschreibt Abstrahlungseffekte der mit $\dot{\beta}$ beschleunigten Ladung; er ist $\propto 1/R$.

7.4 Felder bewegter Punktladungen, Larmor-Formel

Die \vec{E} und \vec{B} -Felder ergeben sich (aus der unintegrierten Form der Potenziale; hier ohne Beweis) als

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \underbrace{\frac{q}{\gamma^2} \cdot \frac{\vec{R} - R\vec{\beta}}{(R - \vec{R}\vec{\beta})^3}}_{\text{Nahfeldterm; richtet das Feld nach der instantanen Position der bewegten Ladung aus, } \propto 1/R^2} + \underbrace{\frac{q}{c} \cdot \frac{\vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(R - \vec{R}\vec{\beta})^3}}_{\text{Strahlungsterm; erscheint nur bei beschleunigter Ladung, } \propto 1/R},$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{R}}{R} \times \vec{E}(\vec{r}, t).$$

Das Magnetfeld steht also senkrecht auf dem elektrischen Feld, und auch auf dem Verbindungsvektor von Beobachter und bewegter Ladung. Die Nebenbedingungen sind

$$R(t_r) = \vec{r} - \vec{r}_q(t_r), \quad t = t_r + R/c, \quad \vec{v} = \vec{v}(t_r) \quad \text{bzw.} \quad \vec{\beta} = \vec{\beta}(t_r).$$

Bei **konstanter Geschwindigkeit** $\vec{v}(t_r) = \text{const} = c\vec{\beta}$ fällt der Strahlungsterm weg, und das Ergebnis vereinfacht sich erheblich. Mit $\vec{s} := \vec{R} - R\vec{\beta}$ wird

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{\gamma^2} \cdot \frac{\vec{s}}{(R - \vec{R}\vec{\beta})^3}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{R}}{R} \times \vec{E} = \frac{\vec{s}}{R} \times \vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{E},$$

und wg. $\vec{s} \times \vec{E} = 0$ wird

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\beta} \times \vec{E}(\vec{r}, t).$$

In erster Ordnung in β folgt

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}, t) \simeq q \frac{\vec{s}}{s^3}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) \simeq q \vec{\beta} \times \frac{\vec{s}}{s^3}},$$

also ein mit der Ladung q mitbewegtes Coulomb-Feld und ein von der zeitlichen Änderung des \vec{E} -Feldes infolge der bewegten Ladung erzeugtes Magnetfeld.

Verwende hier – Beweis durch Einsetzen, mit Vektoridentitäten –

$$s^2 - (\vec{s} \times \vec{\beta})^2 = (R - \vec{R}\vec{\beta})^2,$$

so dass

$$\vec{E} = \frac{q}{\gamma^2} \frac{\vec{s}}{[s^2 - (\vec{s} \times \vec{\beta})^2]^{3/2}} \propto q \frac{\vec{s}}{s^3} \quad \text{in 1. Ordnung } \beta.$$

Sowohl das \vec{E} - als auch das \vec{B} -Feld sind $\propto 1/R^2$.

Der **Poynting-Vektor** der Energiestromdichte (s. Abschn. 5.2) ist demnach

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) \propto 1/R^4;$$

analog die Energiedichte

$$u = \frac{1}{8\pi} [\vec{E}^2 + \vec{B}^2] \propto 1/R^4.$$

Für **beschleunigte Punktladungen** verschwindet der zweite Term im elektrischen Feld ($\propto 1/R$) nicht, er stellt das Strahlungsfeld dar. Wir untersuchen diesen Fall unter der vereinfachenden Voraussetzung, dass die Geschwindigkeit der Ladung zum Zeitpunkt der Messung nichtrelativistisch ist, $v(t) \ll c$, so dass der $R\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}}$ Term vernachlässigt wird;

die Beschleunigung $|\dot{\vec{\beta}}|$ muss jedoch nicht klein sein. Die Strahlungsfelder sind in dieser Näherung

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{str}}(\vec{r}, t) &= q \frac{\vec{R} \times (\vec{R} \times \dot{\vec{v}})}{c^2 R^3} = q \frac{(\vec{R} \cdot \dot{\vec{v}})\vec{R} - R^2 \dot{\vec{v}}}{c^2 R^3}, \\ \vec{B}_{\text{str}}(\vec{r}, t) &= \frac{\vec{R}}{R} \times \vec{E}_{\text{str}}(\vec{r}, t) = q \frac{\dot{\vec{v}} \times \vec{R}}{c^2 R^2}.\end{aligned}$$

Die Beschleunigung erzeugt **polarisierte** Strahlung, sogenannte **Bremsstrahlung**.

Wählen wir die z -Achse in Richtung der Beschleunigung $\dot{\vec{v}}$, wird der **Poynting-Vektor** für die Energiestromdichte des Strahlungsfeldes

$$\begin{aligned}\vec{S}_{\text{str}}(\vec{r}, t) &= \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{\text{str}}(\vec{r}, t) \times \vec{B}_{\text{str}}(\vec{r}, t) \\ &= \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{\text{str}}^2(\vec{r}, t) \cdot \frac{\vec{R}}{R} = \frac{c}{4\pi} \frac{q^2}{c^4 R^6} [(\vec{R} \cdot \dot{\vec{v}})\vec{R} - R^2 \dot{\vec{v}}]^2 \vec{e}_R \\ &= \dots = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{\dot{v}^2 \sin^2 \vartheta}{R^2} \frac{\vec{R}}{R} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{\dot{v}^2 \sin^2 \vartheta}{R^2} \vec{e}_R.\end{aligned}$$

Die Energiestromdichte des Strahlungsfeldes ist demnach $\propto 1/R^2$. Die Energie, die pro Zeiteinheit dt (des Beobachters) in den Raumwinkel $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ abgestrahlt wird, ist

$$dW = \underbrace{R^2 \vec{e}_r d\Omega}_{\text{Flächenelement}} \cdot \vec{S}_{\text{str}} \cdot dt = \frac{q^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 \sin^2 \vartheta d\Omega dt.$$

Pro Zeiteinheit des Beobachters wird demnach die abgestrahlte Leistung ($P = \frac{dW}{dt}$) pro Raumwinkel

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 \sin^2 \vartheta.$$

Daraus folgt die abgestrahlte Leistung einer beschleunigten Punktladung durch Oberflächenintegration

$$P = \frac{q^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \int d\Omega \sin^2 \vartheta.$$

Mit

$$\int d\Omega \sin^2 \vartheta = \int d\Omega (1 - \cos^2 \vartheta) = 2\pi \int d(\cos \vartheta) \cdot (1 - \cos^2 \vartheta)$$

und $t = \cos \vartheta$

$$\Rightarrow \int d\Omega \sin^2 \vartheta = 2\pi \int_{-1}^{+1} dt (1 - t^2) = 2\pi \left[t - \frac{1}{3} t^3 \right]_{-1}^{+1} = 2\pi \left[1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{8\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{2q^2}{3c^3} \dot{v}^2}.$$

Dies ist die nichtrelativistische **Larmor⁴²-Formel** für die Abstrahlung einer beschleunig-

⁴²Joseph Larmor (*1857 Magheragall, †1942 Hollywood) 1897, irischer Physiker und Mathematiker.

ten – dabei langsam bewegten – Punktladung [1].

- Berechnet man mit der Larmor-Formel die Abstrahlung eines Atoms aufgrund der beschleunigten Bewegung der Elektronen um den Kern, erhält man eine mittlere Lebensdauer von $\tau \simeq n^6 \cdot 6 \cdot 10^{-11} \text{ s}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$ die Hauptquantenzahl), d. h., das Atom wäre instabil: Die **klassische** Elektrodynamik darf nicht auf Quantenphänomene angewandt werden.
- Im Betatron, Synchrotron oder Zyklotron erfolgt die Beschleunigung auf der Kreisbahn durch ein äußeres Magnetfeld \vec{B}_a über die Lorentz-Kraft,

$$\dot{\vec{v}} = \frac{q}{mc} \vec{v} \times \vec{B}_a \quad \text{mit} \quad \vec{v} \perp \vec{B}_a,$$

und die abgestrahlte Leistung wird bei einer (nichtrelativistischen) kinetischen Energie der beschleunigten Teilchen von $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ mit der Larmor-Formel

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} \dot{v}^2 = \frac{2q^2}{3c^3} \frac{q^2}{m^2 c^2} \vec{v}^2 B_a^2 = \frac{4q^4}{3m^3 c^5} E_k B_a^2 \propto E_k.$$

⇒ Die abgestrahlte Leistung ist proportional zur kinetischen Energie der beschleunigten Teilchen.

- Abweichend von der vorstehenden Berechnung der Abstrahlung dürfen bei relativistischen Energien (insbesondere in Teilchenbeschleunigern wie Synchrotrons) die Geschwindigkeiten der strahlenden Ladungen nicht vernachlässigt werden. Die Nenner der Ausdrücke für \vec{E} und \vec{B} , $1/(R - \vec{R}\beta)^3$, werden dann in Vorwärtsrichtung klein, und auf einer Kreisbahn wird der Lichtkegel **in Bewegungsrichtung gebogen** (Synchrotronstrahlung).
- Die Ableitung der **relativistischen Larmor-Formel** – ohne die bisherigen Näherungen, aus den Lorentz-invarianten Liénard-Wiechert-Potenzialen – ist wesentlich komplizierter. Man erhält

$$P = \frac{2q^2}{3c(1 - \beta^2)^3} \left[\dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2 \right] \quad \text{relativistische Larmor-Formel}$$

(erstmal abgeleitet von Liénard 1898). Sie enthält den Effekt der Geschwindigkeit $\vec{\beta}$ und der Beschleunigung $\dot{\vec{\beta}}$ auf die abgestrahlte Leistung. Aufgrund der Proportionalität zu $\gamma^6 = 1/(1 - \beta^2)^3$ ist die Abstrahlung für $\beta \ll 1$ gering; für $\beta \rightarrow 1$ strahlt das beschleunigte Teilchen jedoch sehr große Anteile seiner relativistischen Energie als elektromagnetische Wellen ab.

Stehen Geschwindigkeit und Beschleunigung **senkrecht** aufeinander (wie auf der Kreisbahn), wird die abgestrahlte Leistung um den Term $(|\vec{\beta}||\dot{\vec{\beta}}|)^2$ reduziert: Je schneller die Bewegung, umso stärker die Reduktion.

Durch den Term $1/(1-\beta^2)^3 \equiv \gamma^3$ im Vorfaktor **wächst** jedoch insgesamt die abgestrahlte Leistung mit wachsender Geschwindigkeit $\beta = \frac{v}{c}$. (Die spezielle Relativitätstheorie zeigt, dass für geladene Teilchen mit endlicher Masse $\beta = 1$ unmöglich ist.)

Literatur

- [1] Larmor, J.: On the theory of the magnetic influence on spectra; and on the radiation from moving ions. Phil. Mag. S5 44, 505 (1897)
- [2] Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M.: The Feynman Lectures on Physics, Bd. II, Kap. 21. Addison-Wesley, Reading (1966)
- [3] Liénard, A. M.: L'éclairage électrique, Paris. Bd. 16, 5; 106 (1898)
- [4] Wiechert, E.: Elektrodynamische Elementargesetze. Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles, Serie 2, Band 5, 549 (1900)

8 Hertz'scher Dipol

8.1 Zeitabhängige Potenziale des Dipols

Wir behandeln jetzt die Abstrahlung **schwingender** Ladungen [1, 2]. Von besonderem Interesse ist die **elektrische Dipolstrahlung** (Hertz'scher⁴³ Dipol), in manchen Fällen auch die magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolstrahlung [3]. Als **zeitabhängigen Dipol** bezeichnen wir ein System aus zwei Ladungen $\pm q$ im Abstand $\vec{y}(t)$; es wird von \vec{r} aus betrachtet (Abb. 8.1):

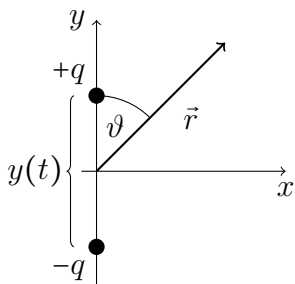


Abb. 8.1 Zeitabhängiger Dipol

Das **Dipolmoment** ist dann

$$\vec{p}(t) = -\frac{q\vec{y}}{2} - \frac{q\vec{y}}{2} = -q\vec{y}(t).$$

Die **Geschwindigkeit** der positiven Ladung ist $-\dot{y}/2$, die der negativen $\dot{y}/2$.

Für den Dipol soll das Liénard-Wiechert-Potenzial berechnet werden

$$(A^\mu)(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \Phi(\vec{r}, t) \\ \vec{A}(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|} \frac{1}{1 - \vec{n}(t_r)\vec{\beta}(t_r)} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\beta}(t_r) \end{pmatrix}$$

mit der **retardierten Zeit** $t_r = t - |\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|/c$ und $\vec{\beta} = \vec{v}/c$.

Die Ausdehnung des Dipols sei klein gegenüber dem Abstand zum Beobachter (\equiv Punkt, an dem das Feld gemessen wird),

$$|\vec{y}| \ll r = |\vec{r}|,$$

so dass

$$1 - \frac{\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|} \vec{\beta}(t_r) \equiv 1 - \vec{n}(t_r)\vec{\beta}(t_r) \simeq 1 - \frac{\vec{r}}{r} \frac{1}{c} \left(\pm \frac{\dot{y}}{2}(t_r) \right) \begin{cases} +\dot{y} & \text{für } -q, \\ -\dot{y} & \text{für } +q, \end{cases}$$

sowie $t_r \simeq t - r/c$.

⁴³Heinrich Rudolf Hertz (*1857 Hamburg, +1894 Bonn), deutscher Physiker.

Das Potenzial wird in der Fernzone $r \gg y$

$$\Phi = \frac{qc}{cr + \vec{r}\dot{y}/2} - \frac{qc}{cr - \vec{r}\dot{y}/2}, \quad \vec{A} = -\frac{q\dot{y}/2}{cr + \vec{r}\dot{y}/2} - \frac{q\dot{y}/2}{cr - \vec{r}\dot{y}/2}.$$

Mit dem Dipolmoment $\vec{p} = -q\vec{y}$ wird das Vektorpotenzial für langsame Oszillationen des Dipols $|\dot{y}| \ll c$:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{q\dot{y}}{cr} = \frac{\dot{\vec{p}}(t_r)}{cr}, \quad t_r = t - \frac{r}{c}.$$

Das skalare Potenzial erhalten wir in der Näherung langsamer Oszillationen aus der (bei Ableitung der L-W Potentiale implizit vorausgesetzten) Lorenz-Eichbedingung

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{A} = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{\nabla} \vec{A} = \vec{\nabla} \left(\frac{\dot{\vec{p}}(t_r)}{cr} \right)$$

als

$$\Phi(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \int dt \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{r} = -\vec{\nabla} \frac{\vec{p}(t - \frac{r}{c})}{r}.$$

(Bei direkter Berechnung des Potentials aus dem genäherten Ausdruck würde $\Phi \rightarrow q/v - q/v = 0$ sein).

Mit Anwendung der Produktregel wird

$$\vec{\nabla}(\vec{p}r^{-1}) = \frac{1}{r} \vec{\nabla} \vec{p} - \frac{\vec{r}}{r^3} \vec{p},$$

$$\vec{\nabla} \vec{p} \equiv \vec{\nabla} \vec{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) = \frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial r} \vec{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) = -\frac{\vec{r}}{rc} \frac{\partial}{\partial t_r} \vec{p}(t_r) = -\frac{-\vec{r}\dot{\vec{p}}}{rc},$$

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{\dot{\vec{p}}\vec{r}}{r^2 c} + \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}.$$

Der erste Term folgt aus der **Retardierung** des Potentials. Relativ nahe am Dipol (jedoch $r \gg y$) überwiegt demnach das statische Potenzial

$$\Phi_{\text{nah}} \simeq \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} \equiv \Phi_{\text{stat}}(\vec{r}).$$

Weiter entfernt überwiegt der retardierte Term, der durch die Schwingungen des Dipols erzeugt wird:

$$\Phi_{\text{fern}}(\vec{r}, t) \simeq \frac{\dot{\vec{p}}\vec{r}}{r^2 c}.$$

8.2 Zeitabhängige Felder

Die durch den schwingenden Dipol erzeugten Felder folgen direkt aus den Ausdrücken für die zeitabhängigen Potentiale.

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \frac{\dot{\vec{p}}(t-r/c)}{cr} = \left(\vec{\nabla} \frac{1}{cr} \right) \times \dot{\vec{p}} + \frac{1}{cr} \vec{\nabla} \times \dot{\vec{p}} \\ &= \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^2 c^2} + \left(\vec{\nabla} \frac{1}{cr} \right) \times \dot{\vec{p}} = \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^2 c^2} + \frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^3 c}, \\ \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}(\Phi) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \dot{\vec{p}}(t-r/c)}{\partial t} - \vec{\nabla} \left(\frac{\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}}{r^2 c} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) \\ &= -\frac{\ddot{\vec{p}}}{rc^2} + \frac{(\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^3 c^2} + \frac{3(\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^4 c} - \frac{\dot{\vec{p}}}{r^2 c} + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}.\end{aligned}$$

Relativ nahe am Dipol überwiegen die am stärksten mit r abfallenden Terme,

$$\vec{B}_{\text{nah}} \simeq \frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^3 c}, \quad \vec{E}_{\text{nah}} \simeq \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}.$$

In der Fernzone überwiegen die Feldterme

$$\vec{B}_{\text{fern}} \simeq \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^2 c^2}, \quad \vec{E}_{\text{fern}} \simeq \frac{(\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^3 c^2} - \frac{\ddot{\vec{p}}}{rc^2} = \frac{1}{r^3 c^2} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}) \times \vec{r}.$$

Die **Beträge** von \vec{E} und \vec{B} in der Fernzone sind gleich,

$$|\vec{E}_{\text{fern}}| = |\vec{B}_{\text{fern}}| = \frac{|\ddot{\vec{p}}| \sin \angle(\vec{p}, \vec{r})}{c^2 r}.$$

Es ist $\vec{E}_{\text{fern}} \perp \vec{B}_{\text{fern}} \perp \vec{e}_r = \vec{r}/r$.

Poynting-Vektor

Die Energieflussdichte des Dipols \vec{p} ,

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})$$

wird in der Fernzone wegen $\vec{B}_{\text{fern}} \perp \vec{e}_r$

$$\begin{aligned}\vec{S}_{\text{fern}} &= \frac{c}{4\pi} (\vec{B}_{\text{fern}} \times \vec{e}_r) \times \vec{B}_{\text{fern}} = \frac{c}{4\pi} [\vec{B}_{\text{fern}}^2 \vec{e}_r - (\vec{B}_{\text{fern}} \cdot \vec{e}_r) \vec{B}_{\text{fern}}] \\ &= \frac{c}{4\pi} \vec{B}_{\text{fern}}^2 \vec{e}_r = \frac{c}{4\pi} \frac{(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r})^2}{c^4 r^4} \vec{e}_r = \frac{\ddot{\vec{p}}^2 \sin^2(\angle(\vec{p}, \vec{r}))}{4\pi c^3 r^2} \vec{e}_r.\end{aligned}$$

⇒ Der Poynting-Vektor zeigt in Richtung \vec{e}_r ; der Betrag ist

$$|\vec{S}_{\text{fern}}| = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2 \sin^2(\angle(\vec{p}, \vec{r}))}{4\pi r^2 c^3},$$

was auch direkt aus

$$|\vec{S}_{\text{fern}}| = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_{\text{fern}}| |\vec{B}_{\text{fern}}| \sin(\angle(\vec{E}_{\text{fern}}, \vec{B}_{\text{fern}})) = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_{\text{fern}}|^2$$

folgt. Der Energiefluss ist demnach $\propto 1/r^2, \propto |\ddot{\vec{p}}|^2$.

Für $\angle(\vec{p}, \vec{r}) = 90^\circ$ (Ortsvektor der Messung senkrecht zum Dipol) ist die Abstrahlung wegen $\sin^2(\angle(\vec{p}, \vec{r}))$ maximal; in Richtung der Dipolachse verschwindet sie.

Abgestrahlte Energie des Dipols

Sie ist in der Fernzone durch Integration des Poynting-Vektors über t und die Fläche (in der Nahzone komplizierter)

$$\begin{aligned} W &= \int_0^T dt \oint_A d\vec{A} \vec{S}_{\text{fern}} = \int_0^T dt \oint_A d\varphi d\vartheta \sin^3 \vartheta r^2 \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{4\pi r^2 c^3} \\ &= \frac{1}{2c^3} \int_0^T dt |\ddot{\vec{p}}|^2 \underbrace{\int_0^T d\vartheta \sin^3 \vartheta}_{= 4/3 \text{ (s. Abschn. 7.4)}} = \frac{2}{c^3} \int_0^T dt |\ddot{\vec{p}}|^2. \end{aligned}$$

Bei gegebener zeitlicher Änderung des Dipols lässt sich das Zeitintegral auswerten. Beispielsweise bei harmonischer Oszillation:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{p}_0 \sin(\omega t_r) = \vec{p}_0 \sin \omega(t - r/c), & \ddot{\vec{p}} &= -\vec{p}_0 \omega^2 \sin \omega(t - r/c), \\ \Rightarrow W &= \frac{2}{3c^3} p_0^2 \omega^4 \int_0^T dt \sin^2(\omega t) = \frac{2}{3c^3} p_0^2 \omega^3 \int_0^{2\pi} dx \sin^2 x = \frac{\pi p_0^2 \omega^3}{3c^3} \end{aligned}$$

abgestrahlte Energie für **eine Schwingungsperiode**. Die **zeitlich gemittelte** Strahlungsleistung des Dipols wird mit $\overline{\sin^2 \omega t} = \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2}$,

$$\overline{P} = \frac{d\overline{W}}{dt} = \frac{2\omega^4 p_0^2}{3c^3} \overline{\sin^2 \omega t} = \frac{\omega^4 p_0^2}{3c^3} = \frac{16\pi^4 c p_0^2}{3\lambda^4},$$

$$c = \nu \lambda = \frac{\omega}{2\pi} \lambda, \quad p_0 \equiv q \cdot y; \quad y \equiv \bar{l} = \text{Länge des Dipols.}$$

Da die im zeitlichen Mittel abgestrahlte Leistung umgekehrt proportional zur **vierten Potenz der Wellenlänge** ist, $\overline{P} \propto 1/\lambda^4$, werden kleine Wellenlängen ($\lambda_{\text{blau}} \simeq \frac{1}{2} \lambda_{\text{rot}}$) bevorzugt **abgestrahlt**.

In analoger Weise wird blaues Sonnenlicht an den Molekülen der Erdatmosphäre (die es in Schwingungen versetzt) etwa 16 mal stärker als rotes Licht gestreut: Dem verdankt der Himmel seine blaue Färbung [4].

Die Ausdrücke für \vec{E}_{fern} , \vec{B}_{fern} und \vec{S}_{fern} gelten nicht nur für den schwingenden Hertz'schen Dipol, sondern auch für das Fernfeld einer **beliebigen schwingenden Ladungsverteilung** (im Grenzfall $v \ll c$) im Volumen V , mit dem Potenzial

$$A^\mu(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int_V d^3r' \frac{j^\mu(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

$$A_{\text{fern}}^\mu(\vec{r}, t) \simeq \frac{1}{cr} \int d^3r' j^\mu(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \quad \text{für } r \gg r'.$$

Wenn wir die Änderung der Ladung q im Volumen V schreiben als

$$\dot{q} \equiv \int_V d^3r' \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \equiv c \cdot r \cdot \vec{A},$$

so gelten die oben abgeleitete Ausdrücke für \vec{E}_{fern} , \vec{B}_{fern} und \vec{S}_{fern} mit der Ersetzung des Dipolmoments \vec{p} durch \vec{q} .

Auch ohne die bisherige Einschränkung $v \ll c$ – d. h. im voll relativistischen Fall – lässt sich die Abstrahlung des Dipols exakt berechnen. Für die abgestrahlte Gesamtleistung gilt dann die – für den Dipol modifizierte – **relativistische Larmor-Formel**, s. Abschn. 7.4.

Literatur

- [1] Hertz, H.: Ueber sehr schnelle elektrische Schwingungen. Ann. Physik 267, 421 (1887)
- [2] Hertz, H.: Ueber die Ausbreitungsgeschwindigkeit der electrodynamischen Wirkungen. Ann. Physik 270, 551 (1888)
- [3] Kark, K.: Antennen und Strahlungsfelder: elektromagnetische Wellen auf Leitungen, im Freiraum und ihre Abstrahlung. Vieweg, Wiesbaden (2006)
- [4] Strutt, J. W. (Lord Rayleigh): On the light from the sky, its polarization and colour. Phil. Mag. XLI, 107, 274 (1870)

9 Aufgaben

Die in diesem Abschnitt zusammengefassten Aufgaben sind zum Teil mit *Musterlösungen* versehen; bei der Mehrzahl sind jedoch nur die *Ergebnisse* angegeben, so dass die Lösungswege selbst erarbeitet werden können.

9.1 Vektoren, Matrizen und Tensoren

1. Berechnen Sie die Rotation des Feldes

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ \alpha xy \\ z^2 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von α ist das Feld konservativ?

2. Für welche Werte von k gilt $\vec{\nabla}(r^k \vec{r}) = 0$ in drei Dimensionen und für $r \neq 0$?
3. Die 2×2 -Matrix

$$M(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$$

verhält sich unter Drehungen wie ein Tensor zweiter Stufe, das heißt

$$M(\vec{x}') = DM(\vec{x})D^{-1}, \quad \vec{x}' = D\vec{x}.$$

Zeigen Sie dies explizit für eine 2D-Drehung mit Winkel φ .

Lösungen

- 1.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha y + 2y \end{pmatrix}.$$

Für $\alpha = -2$ ist das Feld konservativ.

- 2.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(r^k \vec{r}) &= kr^{k-1} \frac{\vec{r}}{r} + 3r^k \\ &= (3+k)r^k \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k = -3.$$

3. Die 2d-Drehmatrix lautet

$$D = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Mit $\cos \varphi \equiv c$, $\sin \varphi \equiv s$ wird

$$\begin{aligned} DM(\vec{x})D^{-1} &= D \begin{pmatrix} x^2c + xys & -x^2s + xyc \\ xyc + y^2s & y^2c - xys \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^2c^2 + 2xysc + y^2s^2 & (y^2 - x^2)cs + xy(c^2 - s^2) \\ (y^2 - x^2)cs + xy(c^2 - s^2) & x^2s^2 - 2xysc + y^2c^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (xc + ys)^2 & (xc + ys)(yc - xs) \\ (xc + ys)(yc - xs) & (yc - xs)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x'^2 & x'y' \\ x'y' & y'^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = D\vec{x} = \begin{pmatrix} x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ y \cos \varphi - x \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

9.2 Einheitsvektoren, Koordinatensysteme

Drücken Sie die Einheitsvektoren der Zylinder- und Kugelkoordinaten, $\vec{e}_{R,\varphi,z}$ und $\vec{e}_{r,\theta,\varphi}$, mithilfe der kartesischen Einheitsvektoren $\vec{e}_{x,y,z}$ aus. Wie lassen sich die $\vec{e}_{x,y,z}$ mithilfe von $\vec{e}_{R,\varphi,z}$ bzw. $\vec{e}_{r,\theta,\varphi}$ formulieren?

Lösung

Die Einheitsvektoren der Zylinderkoordinaten sind:

$$\begin{aligned} \vec{e}_R &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y, \\ \vec{e}_\varphi &= \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y. \end{aligned}$$

Und entsprechend:

$$\vec{e}_x = \cos \varphi \vec{e}_R - \sin \varphi \vec{e}_\varphi, \quad \vec{e}_y = \sin \varphi \vec{e}_R + \cos \varphi \vec{e}_\varphi.$$

Die Einheitsvektoren der Kugelkoordinaten sind:

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z,$$

$$\vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z,$$

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y.$$

Und entsprechend:

$$\vec{e}_x = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_r + \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_\theta - \sin \varphi \vec{e}_\varphi,$$

$$\vec{e}_y = \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_r + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_\theta + \cos \varphi \vec{e}_\varphi,$$

$$\vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta.$$

9.3 Flächen- und Volumenintegral, Satz von Gauß

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{W}(\vec{x}) = xz \vec{e}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{e}_y + (x^2 + y^2) \vec{e}_z.$$

1. Geben Sie das Vektorfeld $\vec{W}(\vec{x})$ in Kugelkoordinaten und deren Basisvektoren $\vec{e}_{r,\theta,\varphi}$ an.
2. Berechnen Sie das Flächenintegral $\oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{W}$, wobei ∂V die Oberfläche der Einheitskugel mit Zentrum im Ursprung ist. Die Orientierung sei so gewählt, dass der Normalenvektor nach außen zeigt.
3. Benutzen Sie den Satz von Gauß, um das Flächenintegral aus b) in ein Volumenintegral über die Vollkugel V umzuwandeln,

$$\oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{W} = \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{W},$$

und integrieren Sie die Divergenz von \vec{W} über V .

Ergebnisse

1.

$$\begin{aligned}\vec{W}(\vec{x}) = & (r^2 \sin^2 \theta \cos \theta \cos^2 \varphi + \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \sin^2 \theta \cos \theta) \vec{e}_r + \\ & + (r^2 \sin \theta \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi - r^2 \sin^3 \theta) \vec{e}_\theta + \\ & + (-r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi) \vec{e}_\varphi.\end{aligned}$$

2.

$$\oint_{\partial V} d\vec{f} \vec{W} = 0.$$

3. Die Divergenz des Vektorfelds wird am besten zunächst in kartesischen Koordinaten ausgerechnet und dann das Endergebnis in Kugelkoordinaten angegeben:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{W} = r \cos \theta - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r \sin \theta}.$$

Integration über die Vollkugel ergibt

$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{W} = 0.$$

9.4 Linien- und Flächenintegral, Satz von Stokes

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{A}(\vec{x}) = -y \vec{e}_x + (x^2 + y^2) y \vec{e}_y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{e}_z.$$

1. Geben Sie das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{x})$ in Zylinderkoordinaten und deren Basisvektoren $\vec{e}_{R,\varphi,z}$ an.
2. Berechnen Sie das Linienintegral $\oint_C d\vec{s} \cdot \vec{A}$, wobei C der Einheitskreis in der xy -Ebene mit Mittelpunkt im Ursprung ist.
3. Benutzen Sie den Satz von Stokes, um das Linienintegral in ein Flächenintegral über eine, von C berandete Fläche, umzuwandeln,

$$\oint_C d\vec{s} \cdot \vec{A} = \int_F d\vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}), \quad C = \partial F.$$

4. Berechnen Sie das Flächenintegral für den Fall einer Kreisscheibe.

Hinweis: Wenn die Fläche F durch $\vec{f} = \vec{f}(u, v)$ mit zwei Parametern u, v beschrieben wird, dann ist das zugehörige Flächenelement $d\vec{f}$ durch

$$d\vec{f} = dudv \frac{\partial \vec{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial v}$$

gegeben.

Ergebnisse

1. In Zylinderkoordinaten lautet das Vektorfeld:

$$\begin{aligned} \vec{V}(\vec{x}) &= -R \sin \varphi (\cos \varphi \vec{e}_R - \sin \varphi \vec{e}_\varphi) + R^3 \sin \varphi (\sin \varphi \vec{e}_R + \cos \varphi \vec{e}_\varphi) + \frac{z}{R} \vec{e}_z \\ &= (-R \sin \varphi \cos \varphi + R^3 \sin^2 \varphi) \vec{e}_R + (R \sin^2 \varphi + R^3 \sin \varphi \cos \varphi) \vec{e}_\varphi + \frac{z}{R} \vec{e}_z. \end{aligned}$$

2. Das Linienintegral ergibt

$$\oint_C d\vec{s} \cdot \vec{A} = \pi.$$

3. Das Flächenintegral wird

$$\int_F d\vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \pi.$$

4. Die Halbsphäre kann man mit Kugelkoordinaten parametrisieren,

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, \pi/2], \quad \varphi \in [0, 2\pi[.$$

Damit wird das Flächenelement zu

$$d\vec{f} = d\theta d\varphi \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \cos \varphi \\ \sin^2 \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Das Flächenintegral ergibt

$$\begin{aligned}
 \int_F d\vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \cos \varphi \\ \sin^2 \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \theta \\ 4 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \\
 &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi (4 \cos \theta \sin^3 \theta - \underbrace{\cos \theta \sin \theta \sin \varphi}_{=0}) \\
 &= 2\pi \int_0^{\pi/2} d\theta \partial_\theta \sin^4 \theta \\
 &= 2\pi.
 \end{aligned}$$

9.5 Ladungsdichte des Wasserstoffatoms

Die Ladungsdichte eines Wasserstoffatoms im Grundzustand erzeugt das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{e}{r^2} e^{-2r/a_0} \vec{e}_r.$$

1. Berechnen Sie daraus die die Gesamtladung Q das Wasserstoffatoms, das heißt die Ladung, die in einer Sphäre mit Radius $R \rightarrow \infty$ eingeschlossen ist.
2. Bestimmen Sie die Ladungsdichte des Wasserstoffatoms.

Ergebnisse

1. Für die Gesamtladung erhalten wir

$$Q_V = \frac{1}{4\pi} \int d\cos \theta d\varphi e e^{-2R/a_0} = e e^{-2R/a_0} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

2. Die Ladungsdichte wird

$$\rho(\vec{x}) = e \delta^3(\vec{x}) - \frac{e}{2\pi a_0 r^2} e^{-2r/a_0}.$$

9.6 Gradient in Kugelkoordinaten

Bestimmen Sie den Gradientenoperator in Kugelkoordinaten, indem Sie für die partiellen Ableitungen die Kettenregel einsetzen:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Lösung

Zwischen kartesischen Koordinaten und Kugelkoordinaten gelten die Beziehungen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/z) \\ \arctan(y/x) \end{pmatrix}.$$

Die Jacobi-Transformation wird demnach

$$\begin{aligned} J = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} (r, \theta, \varphi) &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi / r & -\sin \varphi / (r \sin \theta) \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi / r & \cos \varphi / (r \sin \theta) \\ \cos \theta & -\sin \theta / r & 0 \end{pmatrix} \\ &= (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta / r, \vec{e}_\varphi / (r \sin \theta)). \end{aligned}$$

Damit ist der Gradient in Kugelkoordinaten

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \partial_r + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \partial_\theta + \frac{\vec{e}_\varphi}{r \sin \theta} \partial_\varphi.$$

9.7 Potenzial und Feld einer geladenen Kugeloberfläche

Geben Sie das elektrostatische Potenzial Φ und das elektrische Feld \vec{E} an, das von einer homogen geladenen, unendlich dünnen Kugeloberfläche mit Radius R und Gesamtladung Q verursacht wird.

Ergebnis

Das Potenzial wird

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) = \Phi(\vec{x}) \Big|_{\theta=0} &= \frac{Q}{4\pi} \int \frac{d \cos \theta' d\varphi'}{|r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta'|} \\ &= Q \frac{r + R - |r - R|}{2rR} = \begin{cases} \frac{Q}{R}, & r \leq R \\ \frac{Q}{r}, & r \geq R \end{cases}. \end{aligned}$$

Das elektrische Feld ist dementsprechend

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{x}) = \begin{cases} 0, & r \leq R \\ \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r, & r \geq R \end{cases}.$$

9.8 Potenzial und Feld eines geladenen Drahtes

Berechnen Sie das elektrostatische Potenzial Φ und das elektrische Feld \vec{E} , das von einem homogen geladenen, unendlich dünnen Draht der Länge L und Gesamtladung Q verursacht wird.

Wie lauten Φ und \vec{E} im Limes $L \rightarrow \infty$, wenn $\lambda = Q/L$ konstant gehalten wird?

Hinweise: Legen Sie das Koordinatensystem so, dass der Draht entlang der z -Achse verläuft und der Ursprung in seiner Mitte liegt. Sei $l = L/2$, dann wird die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{x}) = \frac{Q}{2\pi RL} \delta(R) \Theta(l - |z|).$$

Es ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \text{const}.$$

Ergebnisse

Für das Potenzial ergibt sich:

$$\Phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{Q}{L} \ln \frac{l - z + \sqrt{(l - z)^2 + R^2}}{-l - z + \sqrt{(l + z)^2 + R^2}}.$$

Die (x, y) -Komponenten des elektrischen Feldes werden:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_x(\vec{x}) \\ E_y(\vec{x}) \end{pmatrix} &= -\frac{Q}{L} \left[\frac{1}{\sqrt{(l - z)^2 + R^2}} \frac{1}{l - z + \sqrt{(l - z)^2 + R^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{(l + z)^2 + R^2}} \frac{1}{-l - z + \sqrt{(l + z)^2 + R^2}} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{Q}{LR} \vec{e}_R \left[\frac{l - z}{\sqrt{(l - z)^2 + R^2}} + \frac{l + z}{\sqrt{(l + z)^2 + R^2}} \right]. \end{aligned}$$

Die z -Komponente lautet:

$$E_z(\vec{x}) = \frac{Q}{L} \left[\frac{1}{\sqrt{(l - z)^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(l + z)^2 + R^2}} \right].$$

Im Limes $L \rightarrow \infty$ und $\lambda = Q/L = \text{const}$ strebt das Potenzial gegen

$$\Phi(\vec{x}) \rightarrow -2\lambda \ln R + \infty.$$

Hier beschreiben Φ und $\Phi + c$ denselben physikalischen Zustand; die Konstante c wird sogar unendlich groß. Das Potenzial enthält demnach unphysikalische Freiheitsgrade, die jedoch durch entsprechende Eichung beseitigt werden.

Den Grenzwert des elektrischen Feldes erhält man entweder aus dem Gradienten von $2\lambda \ln R$ oder aus den obigen Ausdrücken für endliches l :

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{2\lambda}{R^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2\lambda}{R} \vec{e}_R.$$

9.9 Multipolentwicklung

1. Für das Potenzial Φ einer beliebigen Ladungsverteilung ρ werden die ersten Terme der Multipolentwicklung

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{Q}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x}\vec{d}}{|\vec{x}|^3} + \frac{x_i x_j Q_{ij}}{2|\vec{x}|^5} + \frac{x_i x_j x_k Q_{ijk}}{6|\vec{x}|^7} + \dots$$

Wie lautet der Ausdruck für das Oktupolmoment Q_{ijk} ?

2. Zeige, dass die beiden Beziehungen

$$U = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \vec{E}^2(\vec{x}), \quad \text{und} \quad U = \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

äquivalent sind, wenn die Felder schnell genug abfallen, so dass Randterme im Unendlichen vernachlässigt werden können.

Lösungen

1.

$$\begin{aligned}
 \partial'_i \partial'_j \partial'_k \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \Big|_{\vec{x}'=0} &= \partial'_i \partial'_j \frac{x_k - x'_k}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \Big|_{\vec{x}'=0} \\
 &= \partial'_i \frac{-\delta_{jk} |\vec{x} - \vec{x}'|^3 + 3(x_k - x'_k)(x_j - x'_j) |\vec{x} - \vec{x}'|}{|\vec{x} - \vec{x}'|^6} \Big|_{\vec{x}'=0} \\
 &= \partial'_i \frac{3(x_k - x'_k)(x_j - x'_j) - \delta_{jk} |\vec{x} - \vec{x}'|^2}{|\vec{x} - \vec{x}'|^5} \Big|_{\vec{x}'=0} \\
 &= \frac{-3\delta_{ik}(x_j - x'_j) - 3\delta_{ij}(x_k - x'_k) + 2\delta_{jk}(x_i - x'_i)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^5} \Big|_{\vec{x}'=0} + \\
 &\quad + \frac{5(x_i - x'_i)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \frac{3(x_k - x'_k)(x_j - x'_j) - \delta_{jk} |\vec{x} - \vec{x}'|^2}{|\vec{x} - \vec{x}'|^5} \Big|_{\vec{x}'=0} \\
 &= \frac{15x_i x_j x_k - 3|\vec{x}|^2 (\delta_{ij} x_k + \delta_{jk} x_i + \delta_{ki} x_j)}{|\vec{x}|^7}.
 \end{aligned}$$

Das Oktupolmoment wird damit

$$Q_{ijk} = \int d^3x \rho(\vec{x}) (15x_i x_j x_k - 3|\vec{x}|^2 (\delta_{ij} x_k + \delta_{jk} x_i + \delta_{ki} x_j)).$$

2.

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{8\pi} \int d^3x \vec{E}^2(\vec{x}) = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \vec{E}(\vec{x}) (-\vec{\nabla} \Phi(\vec{x})) = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \vec{\nabla} \vec{E}(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) = \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \frac{\rho(\vec{x}) \rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}.
 \end{aligned}$$

9.10 Multipolmomente

Die sphärischen Multipolmomente sind definiert durch

$$q_{lm} = \int d^3x \rho(\vec{x}) r^l Y_{lm}^*(\theta, \varphi).$$

Berechnen Sie *alle* Multipolmomente der Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{x}) = \frac{e}{64\pi a^3} \left(\frac{r}{a}\right)^2 e^{-r/a} \sin^2 \theta.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Orthogonalitätsbeziehungen der Kugelflächenfunktionen und der Legendre-Polynome aus.

Lösung

Zunächst fällt auf, dass die Ladungsverteilung nicht von φ abhängt. Bei der Berechnung der Multipolmomente tritt daher das Integral

$$\int_0^{2\pi} d\varphi e^{im\varphi} = 2\pi\delta_{m0}$$

auf (Definition der Kugelflächenfunktionen). Alle Multipolmomente q_{lm} mit $m \neq 0$ verschwinden also. Weiter ist

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \frac{2}{3}(P_0(\cos\theta) - P_2(\cos\theta)).$$

Da die Legendre-Polynome die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_{-1}^1 dx P_n(x)P_m(x) = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

erfüllen, können nur die beiden Multipolmomente q_{00} und q_{20} von Null verschieden sein. Der allgemeine Ausdruck für q_{lm} wird

$$\begin{aligned} q_{lm} &= 2\pi\delta_{m0} \int dr r^{l+2} \cdot \frac{e}{64\pi a^3} \left(\frac{r}{a}\right)^2 e^{-r/a} \\ &\quad \cdot \int d\cos\theta \frac{2}{3}(P_0(\cos\theta) - P_2(\cos\theta)) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta) \\ &\stackrel{x=r/a}{=} \frac{ea^l\delta_{m0}}{24} \left(\delta_{l0} - \frac{\delta_{l2}}{5}\right) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int dx x^{l+4} e^{-x} \\ &= \frac{ea^l\delta_{m0}}{24} \left(\delta_{l0} - \frac{\delta_{l2}}{5}\right) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} (l+4)! . \end{aligned}$$

Speziell ergibt sich

$$q_{00} = \frac{e}{\sqrt{4\pi}} , \quad q_{20} = -ea^2 \sqrt{\frac{45}{\pi}} .$$

9.11 Feld und Energie einer geladenen Vollkugel

1. Eine Vollkugel mit Radius R habe die Ladungsdichte

$$\rho(r) = \frac{15Q}{2\pi R^5} \left(r - \frac{R}{2}\right)^2 ,$$

wobei r den Abstand zum Mittelpunkt der Kugel bezeichnet. Welches elektrische Feld wird von dieser Ladungsdichte erzeugt?

2. Wie groß ist die Feldenergie innerhalb einer Sphäre mit Radius r und Mittelpunkt im Zentrum der Kugel?

Lösungen

1. Die Ladungsdichte lautet

$$\rho(\vec{x}) = \frac{15Q}{2\pi R^5} \left(r - \frac{R}{2}\right)^2 \Theta(R - r).$$

Aus der sphärischen Symmetrie der Ladungsdichte erhält man, dass $\vec{E} = E\vec{e}_r$. Mit dem Satz von Gauß erhält man durch Integration über eine Kugel mit Radius r , zentriert über den Ursprung,

$$\int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \int dA E = 4\pi r^2 E = 4\pi \int d^3x \rho(\vec{x})$$

und damit weiterhin

$$\begin{aligned} E(r) &= \frac{30Q}{r^2 R^5} \left[\Theta(r - R) \int_0^R dr r^2 \left(r - \frac{R}{2}\right)^2 + \Theta(R - r) \int_0^r dr r^2 \left(r - \frac{R}{2}\right)^2 \right] \\ &= \frac{Q}{R^2} \left[\Theta(r - R) + \Theta(R - r) \left(6 \left(\frac{r}{R}\right)^3 - \frac{15}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{5}{2} \frac{r}{R} \right) \right]. \end{aligned}$$

2. Für die Feldenergie innerhalb einer Kugel mit Radius r erhält man

$$\begin{aligned} U(r) &= \frac{1}{8\pi} \int d^3x \vec{E}^2(\vec{x}) = \frac{1}{2} \int_0^r dr E^2(r) \\ &= \frac{Q^2}{2R} [\Theta(r - R)(U_2(r/R) + U_1(1)) + \Theta(R - r)U_1(r/R)], \end{aligned}$$

wobei

$$U_1(x) = \int_0^x dx x^2 \left(6x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{5}{2}x \right)^2 = 4x^9 - \frac{45}{4}x^8 + \frac{345}{28}x^7 - \frac{25}{4}x^6 + \frac{5}{4}x^5,$$

$$U_2(x) = \int_1^x dx x^2 = \frac{x^3 - 1}{3}.$$

9.12 Potenzial im Würfel

Gegeben sei ein Würfel der Kantenlänge L . Die Seitenflächen befinden sich auf Potenzial null bis auf die Deckenfläche bei $z = L$ mit Potenzial $v(x, y)$ und die Seitenfläche bei $x = L$ mit Potenzial $u(y, z)$.

Bestimmen Sie das Potenzial im Inneren des Würfels für

$$\text{a) } \quad v(x, y) = v_0 \sinh\left(\frac{y}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \quad u(y, z) = 0$$

$$\text{b) } \quad v(x, y) = v_0 \frac{xy}{L^2}, \quad u(y, z) = u_0 \frac{yz}{L^2}.$$

Ergebnisse

1. Für den Fall $u = 0$ und $v \neq 0$ ist die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \sin(\omega_n x) \sin(\omega_m y) \sinh(\omega_{nm} z),$$

wobei

$$\omega_n = \frac{\pi n}{L}, \quad \omega_{nm} = \sqrt{\omega_n^2 + \omega_m^2}.$$

Mit Berücksichtigung der Randbedingungen für den Würfel insbesondere für $z = L$ und der Orthonormalität der Sinusfunktionen erhalten wir für das Potenzial

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{v_0 \omega_m L \sinh(1)}{1 + \omega_m^2 L^2} \sin(\omega_2 x) \sin(\omega_m y) \frac{\sinh(\omega_{2m} z)}{\sinh(\omega_{2m} L)}.$$

2. Das Potenzial muss hier als Linearkombination zweier Anteile dargestellt werden, von denen beide jeweils an allen Wänden bis auf einer verschwinden

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} (A_{nm} \sinh(\omega_{nm} x) \sin(\omega_n y) \sin(\omega_m z) + \\ + B_{nm} \sin(\omega_n x) \sin(\omega_m y) \sinh(\omega_{nm} z)). \end{aligned}$$

Da die Randbedingungen an beiden Flächen analog sind, reicht es, nur eine davon zu berechnen. Das gesamte Potenzial wird dann

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^{n+m}}{\omega_n \omega_m L^2 \sinh(\omega_{nm} L)} (u_0 \sinh(\omega_{nm} x) \sin(\omega_n y) \sin(\omega_m z) + \\ + v_0 \sin(\omega_n x) \sin(\omega_m y) \sinh(\omega_{nm} z)). \end{aligned}$$

9.13 Kugelflächenfunktionen als Orthonormalsystem

1. Für zwei Funktionen f und g definieren wir das Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta f(\theta, \varphi) g^*(\theta, \varphi).$$

Berechnen Sie für

$$f(\theta, \varphi) = aY_{11}(\theta, \varphi) + bY_{10}(\theta, \varphi) + cY_{1-1}(\theta, \varphi),$$

$$g(\theta, \varphi) = dY_{11}(\theta, \varphi) + eY_{10}(\theta, \varphi)$$

das Skalarprodukt (f, g) . Einmal mithilfe der expliziten Ausdrücke für die Kugelflächenfunktionen Y_{lm} , indem Sie über θ und φ integrieren, und ein zweites Mal mithilfe ihrer Orthonormalitätsbeziehung.

2. Das Dipolmoment \vec{d} und die sphärischen Multipolmomente q_{lm} sind gegeben durch

$$\vec{d} = \int d^3x \rho(\vec{x}) \vec{x}, \quad q_{lm} = \int d^3x \rho(\vec{x}) r^l Y_{lm}^*(\theta, \varphi).$$

Drücken Sie den Vektor \vec{x} mithilfe der Kugelflächenfunktionen aus und leiten Sie so die Beziehungen zwischen den Komponenten von \vec{d} und den q_{lm} ab.

3. Die Komponenten Q_{ij} des Quadrupolmoments sind

$$Q_{ij} = \int d^3x \rho(\vec{x}) (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}).$$

Auch hier kann der Integrand wieder durch Kugelflächenfunktionen angegeben werden. Wie lauten die Beziehungen zwischen den Q_{ij} und den q_{lm} ?

Hinweis zu 3.: Nur fünf der neun Q_{ij} sind unabhängig.

Lösungen

1. Die benötigten Kugelflächenfunktionen sind ($\cos \theta = x$)

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} x, \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sqrt{1-x^2} e^{i\varphi}, \quad Y_{1-1} = -Y_{11}^*.$$

Das Skalarprodukt der beiden Funktionen ergibt

$$(f, g) = ad(Y_{11}, Y_{11}) + ae(Y_{11}, Y_{10}) + bd(Y_{10}, Y_{11}) + be(Y_{10}, Y_{10}) + cd(Y_{1-1}, Y_{11}) + ce(Y_{1-1}, Y_{10}).$$

Wenn die m 's nicht übereinstimmen erhalten wir Beiträge der Art $e^{in\varphi}$, $n \neq 0$, unter dem Integral. Zusammen mit $\int_0^{2\pi} d\varphi$ ergibt das Null. Daher bleibt

$$(f, g) = ad(Y_{11}, Y_{11}) + be(Y_{10}, Y_{10}).$$

Mit den obigen Ausdrücken erhalten wir

$$(Y_{11}, Y_{11}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 dx |Y_{11}|^2 = 2\pi \int_{-1}^1 dx \frac{3}{8\pi} (1-x^2) = 1,$$

$$(Y_{10}, Y_{10}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 dx |Y_{10}|^2 = 2\pi \int_{-1}^1 dx \frac{3}{4\pi} x^2 = 1,$$

und daher

$$(f, g) = ad + be.$$

Mit der Orthonormalitätsrelation kann man das Skalarprodukt analog zum Skalarprodukt von zwei Vektoren $\vec{v} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$ und $\vec{w} = d\vec{e}_1 + e\vec{e}_2$ ausrechnen, was natürlich viel einfacher ist.

2. Da $\vec{x} = r\vec{e}_r$ können nur die q_{1m} mit \vec{d} zusammenhängen. Mit den Kugelflächenfunktionen Y_{10} und $Y_{1\pm 1}$ aus a) erhalten wir

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= -\sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{Y_{11} - Y_{1-1}}{2} \vec{e}_x + i\sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{Y_{11} + Y_{1-1}}{2} \vec{e}_y + \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10} \vec{e}_z \\ &= \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{Y_{1-1}^* - Y_{11}^*}{2} \vec{e}_x + \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{Y_{1-1}^* + Y_{11}^*}{2i} \vec{e}_y + \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}^* \vec{e}_z.\end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}d_x &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (q_{1-1} - q_{11}), & d_y &= \frac{1}{i} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (q_{1-1} + q_{11}), & d_z &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} q_{10}, \\ q_{1-1} &= -q_{11}^* = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (d_x + id_y), & q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} d_z.\end{aligned}$$

3. Da im Integrand r^2 steht, ist das Quadrupolmoment mit den q_{2m} verknüpft. In Kugelkoordinaten haben wir

$$\left(3 \frac{x_i x_j}{r^2} - \delta_{ij} \right) = \begin{pmatrix} 3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 1 & 3 \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi & 3 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \\ Q_{xy} & -Q_{xx} - Q_{zz} & 3 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \\ Q_{xz} & Q_{yz} & 3 \cos^2 \theta - 1 \end{pmatrix}.$$

Die benötigten Kugelflächenfunktionen sind

$$\begin{aligned}Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), \\ Y_{21} &= -Y_{2-1}^* = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}, & Y_{22} &= Y_{2-2}^* = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi}.\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$(xy) \quad 3 \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi = \frac{3}{4i} \sin^2 \theta (e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}) = i \sqrt{\frac{6\pi}{5}} (-Y_{22}^* + Y_{2-2}^*),$$

$$(xz) \quad 3 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi = \sqrt{\frac{6\pi}{5}} (Y_{21}^* - Y_{2-1}^*),$$

$$(yz) \quad 3 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi = -i \sqrt{\frac{6\pi}{5}} (Y_{21}^* + Y_{2-1}^*),$$

$$(xx) \quad 3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 1 = \frac{3}{4} \sin^2 \theta (e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}) + \frac{3}{2} \sin^2 \theta - 1 \\ = \sqrt{\frac{6\pi}{5}} (Y_{22}^* + Y_{2-2}^*) - \sqrt{\frac{4\pi}{5}} Y_{20}^*,$$

$$(zz) \quad 3 \cos^2 \theta - 1 = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} Y_{20}^*,$$

und damit

$$Q_{xy} = Q_{yx} = i \sqrt{\frac{6\pi}{5}} (-q_{22} + q_{2-2}), \quad Q_{xz} = Q_{zx} = \sqrt{\frac{6\pi}{5}} (q_{21} - q_{2-1}), \\ Q_{yz} = -i \sqrt{\frac{6\pi}{5}} (q_{21} + q_{2-1}), \quad Q_{xx} = \sqrt{\frac{6\pi}{5}} (q_{22} + q_{2-2}) - \sqrt{\frac{4\pi}{5}} q_{20}, \\ Q_{zz} = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} q_{20}, \quad Q_{yy} = -Q_{xx} - Q_{zz} \\ = -\sqrt{\frac{6\pi}{5}} (q_{22} + q_{2-2}) - \sqrt{\frac{4\pi}{5}} q_{20},$$

bzw.

$$q_{22} = q_{2-2}^* = \sqrt{\frac{5}{6\pi}} \frac{Q_{zz}/2 + Q_{xx} + iQ_{xy}}{2}, \quad q_{21} = -q_{2-1}^* = \sqrt{\frac{5}{6\pi}} \frac{Q_{xz} + iQ_{yz}}{2} \\ q_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} Q_{zz}.$$

9.14 Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

Für rotationssymmetrische Systeme lässt sich die Lösung der Laplace-Gleichung schreiben als

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta),$$

wobei P_l die Legendre-Polynome sind. Diese erfüllen die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_{-1}^1 dx P_k(x) P_l(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{kl}.$$

1. Eine unendlich dünne und leitfähige Kugelschale mit Radius R wird in ein homogenes elektrisches Feld, $\vec{E} = E\vec{e}_z$, gebracht. Wie lautet das Potenzial $\Phi(r, \theta)$ im Außenraum? Welche Flächenladungsdichte $\sigma(\theta)$ wird auf der Kugelschale erzeugt?
2. Auf einer unendlich dünnen Kugelschale mit Radius R liegt das Potenzial $V(\theta)$ an. Der Innen- und Außenraum der Schale ist frei von Ladungen. Entwickeln Sie V nach Legendre-Polynomen und geben Sie so das Potenzial Φ im Innen- und Außenraum an. Was ergibt sich für den Spezialfall $V(\theta) = V_0 \cos^2 \theta$?

Ergebnisse

1. Für das Potenzial erhält man

$$\Phi(r, \theta) = E \left(\frac{R^3}{r^2} - r \right) P_1(\cos \theta).$$

Die Flächenladungsdichte ergibt sich aus

$$\begin{aligned} 4\pi\sigma(\theta) &= E_r(R, \theta) = -\partial_r \Phi(R, \theta) = 3EP_1(\cos \theta) \\ \Rightarrow \sigma(\theta) &= \frac{3E}{4\pi} P_1(\cos \theta). \end{aligned}$$

2. Entwickeln wir V nach Legendre-Polynomen, erhalten wir

$$V(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(\cos \theta), \quad \text{wobei} \quad a_l = \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 d(\cos \theta) P_l(\cos \theta) V(\theta).$$

Mit dem Potenzial im Innen- und Außenraum und auf der Schale, den Randbedingungen und der Entwicklung von V erhalten wir

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \left\{ \begin{array}{ll} (r/R)^l, & r > R \\ 1, & r = R \\ (R/r)^{l+1}, & r < R \end{array} \right\} P_l(\cos \theta)$$

und für den Spezialfall $V(\theta) = V_0 \cos^2 \theta$ schließlich

$$\Phi(r, \theta) = \frac{V_0}{3} \cdot \left\{ \begin{array}{ll} P_0(\cos \theta) + 2(r/R)^2 P_2(\cos \theta), & r > R \\ P_0(\cos \theta) + 2 P_2(\cos \theta), & r = R \\ (R/r) P_0(\cos \theta) + 2(R/r)^3 P_2(\cos \theta), & r < R \end{array} \right. .$$

9.15 Dielektrikum und Grenzbedingungen

Gegeben sei eine unendlich ausgedehnte Platte der Dicke d in der yz -Ebene. Das Material der Platte ist ein lineares Dielektrikum mit dielektrischer Suszeptibilität χ_e . Die freie Ladungsdichte ist überall null. Diese Platte befindet sich in einem externen elektrischen Feld

$$\vec{E}_{ex} = E \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Berechnen Sie das elektrische Feld \vec{E}_{in} und die Verschiebungsdichte \vec{D}_{in} innerhalb der Platte. Wie lautet der Ausdruck für \vec{E} und \vec{D} im gesamten Raum?
2. Berechnen Sie die gebundene Ladungsverteilung.
3. Berechnen Sie den Winkel zwischen \vec{E}_{in} und der x -Achse.

Ergebnisse

1. Wir legen das Koordinatensystem so, dass die Platte von $x = -d/2$ bis $d/2$ reicht. Es ist $\vec{D}_{ex} = \vec{E}_{ex}$, $\vec{D}_{in} = \varepsilon \vec{E}_{in}$ mit $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e$. Die Ausdrücke für das elektrische Feld und die Verschiebungsdichte in der Platte werden bei Berücksichtigung der Stetigkeitsbedingungen an Grenzflächen

$$\vec{E}_{in} = E \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{D}_{in} = E \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \varepsilon \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die entsprechenden Ausdrücke für den gesamten Raum werden

$$\vec{E} = E \begin{pmatrix} \cos \alpha \left[\Theta \left(x - \frac{d}{2} \right) + \Theta \left(-x - \frac{d}{2} \right) + \varepsilon^{-1} \Theta \left(\frac{d}{2} - x \right) \Theta \left(\frac{d}{2} + x \right) \right] \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{D} = E \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \left[\Theta \left(x - \frac{d}{2} \right) + \Theta \left(-x - \frac{d}{2} \right) + \varepsilon \Theta \left(\frac{d}{2} - x \right) \Theta \left(\frac{d}{2} + x \right) \right] \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Freie Ladungen sind nach Voraussetzung nicht vorhanden, dementsprechend ist auch $\vec{\nabla} \vec{D} = 0$. Gebundene Ladungen sind jedoch an den Oberflächen der Platte vorhanden. Diese sind Quellen des elektrischen Feldes:

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \vec{E} = \frac{E \cos \alpha}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \left[\delta\left(x - \frac{d}{2}\right) - \delta\left(x + \frac{d}{2}\right) \right].$$

3. Der Winkel γ zwischen \vec{E}_{in} und der x -Achse ist

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \gamma}} = \cos \gamma = \frac{E_{in,x}}{|\vec{E}_{in}|} = \frac{\varepsilon^{-1} \cos \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \varepsilon^{-2} \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \tan^2 \alpha}}$$

$$\Rightarrow \gamma = \arctan(\varepsilon \tan \alpha).$$

9.16 Kondensator mit Dielektrika

Betrachten Sie einen Kondensator aus zwei kugelförmigen, unendlich dünnen Metallschalen mit Radien $r_i < r_a$ und Ladung $\pm Q$. Der Zwischenraum ist mit zwei Schichten aus Dielektrika gefüllt. Die innere Schicht (ε_i) reicht von r_i bis r_m und die äußere (ε_a) von r_m bis r_a . Die Kapazität eines Kondensators ist definiert als

$$C = \left| \frac{Q}{U} \right|, \quad U_{21} = \Phi(\vec{x}_2) - \Phi(\vec{x}_1) = - \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{s} \cdot \vec{E}.$$

1. Berechnen Sie die Kapazität dieses Kondensators.
2. Welche Energie steckt im Kondensator?

Ergebnisse

1. Man berechnet zunächst das elektrische Feld und daraus die Spannung als Funktion der Ladung. Daraus folgt schließlich die Kapazität

$$C = \left[\frac{1}{\varepsilon_i} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_m} \right) + \frac{1}{\varepsilon_a} \left(\frac{1}{r_m} - \frac{1}{r_a} \right) \right]^{-1}.$$

Natürlich hätte man den Kondensator auch als zwei einzelne, hintereinandergeschaltete Kondensatoren betrachten können. Die Kapazität eines einzelnen Kondensators wäre dann

$$C_{21} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Die inversen Kapazitäten addieren sich entsprechend

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{am}} + \frac{1}{C_{mi}}.$$

2. Die Energie des Kondensators steckt in seinem elektrischen Feld:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi} \int d^3x \vec{E} \vec{D} \\ &= \frac{Q^2}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_i} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_m} \right) + \frac{1}{\varepsilon_a} \left(\frac{1}{r_m} - \frac{1}{r_a} \right) \right), \end{aligned}$$

oder kurz: $W = Q^2/(2C) = CU^2/2$.

9.17 Methode der Spiegelladungen

Eine Wolke zieht über den Himmel. Ihre Unterseite befindet sich 300 m über dem Erdboden und die Oberseite 300 m darüber. Wir nehmen nun an, dass die Wolke elektrisch neutral ist, bis auf eine positive Punktladung $+q$ an ihrer Oberseite und eine negative Punktladung $-q$ an ihrer Unterseite. Außerdem nehmen wir an, dass sich sonst keine Ladungen in der Atmosphäre befinden. Auf der Erdoberfläche direkt unter der Wolke wird ein vertikales elektrisches Feld von $E = 0.333 \text{ g}^{1/2}\text{cm}^{-1/2}\text{s}^{-1}$ gemessen.

Wie groß ist die Ladung q und die externe elektrische Kraft auf die Wolke?

Lösung

Die gesamte Ladungsdichte (Ladungen und Bildladungen) ist

$$\rho(\vec{x}) = q\delta(x)\delta(y) (\delta(z-2d) - \delta(z-d) + \delta(z+d) - \delta(z+2d)).$$

Das zugehörige vertikale elektrische Feld ist

$$E_z(0,0,z) = q \left(\frac{z-2d}{|z-2d|^3} - \frac{z-d}{|z-d|^2} + \frac{z+d}{|z+d|^2} - \frac{z+2d}{|z+2d|^2} \right).$$

Auf der Erdoberfläche $z=0$ ist das E -Feld daher

$$E_z(0,0,0) = \frac{3q}{2d^2},$$

und für die Ladung ergibt sich

$$q = 2.00 \cdot 10^4 \text{ g}^{1/2}\text{cm}^{3/2}\text{s}^{-1}. \quad (6.66 \cdot 10^{-4} \text{ C})$$

Die Kraft, die auf die Wolke wirkt, ist diejenige Kraft, welche die beiden Spiegelladungen auf die beiden Ladungen in der Wolke ausüben:

$$F = q^2 \left(\frac{1}{(3d)^2} - \frac{1}{(4d)^2} - \frac{1}{(2d)^2} + \frac{1}{(3d)^2} \right) = -\frac{13}{144} \frac{q^2}{d^2} = -400 \text{ dyn} = -4.00 \text{ mN}.$$

9.18 Spiegelladungen

Zwei Ladungen, $Q_1 = q$ und $Q_2 = -q$ befinden sich an den Punkten $(x, y, z) = (a, 0, a)$ und $(-a, 0, a)$ über einer geerdeten, leitenden Ebene bei $z = 0$. Berechnen Sie

1. die resultierende Kraft auf die Ladung Q_1 bei $(a, 0, a)$.
2. die Flächenladungsdichte am Punkt $(a, 0, 0)$.
3. die Arbeit, die gegen die elektrostatischen Kräfte verrichtet werden musste, um die Ladungen aus dem Unendlichen an ihre Positionen zu bringen.

Ergebnisse

1. Die Kraft auf die Ladung Q_1 bei $(a, 0, a)$ wird mithilfe von Spiegelladungen $Q'_1 = -q$ und $Q'_2 = q$ bei $(a, 0, -a)$ und $(-a, 0, -a)$ berechnet. Die resultierende Kraft ist dann die Summe der Kräfte der anderen drei Ladungen; dies ergibt

$$\vec{F} = -\frac{q^2}{8a^2} \frac{\vec{e}_x + \vec{e}_z}{\sqrt{2}} (\sqrt{8} - 1).$$

2. Mit dem Gauß'schen Gesetz folgt die Flächenladungsdichte

$$\sigma = \frac{\vec{n} \cdot \vec{E}}{4\pi} = \frac{E_z}{4\pi}.$$

Nach Berechnung der elektrischen Felder von Ladungen und Spiegelladungen erhalten wir das Ergebnis

$$\sigma(a, 0, 0) = -\frac{q}{2\pi a^2} (1 - 5^{-3/2}).$$

3. Die Arbeit, um die Ladungen aus dem Unendlichen an ihre Positionen zu bringen, wird

$$W = \frac{q^2}{a} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{8}}\right).$$

9.19 Green'sche Funktion mit Dirichlet-Randbedingung

Betrachten Sie die unendlich ausgedehnte, leitende Ebene $z = 0$ (xy -Ebene). Auf der Halbebene $x > 0$ liege das konstante Potenzial V , auf der Halbebene $x < 0$ das konstante Potenzial $-V$ an. Die Dirichlet'sche Green'sche Funktion

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}}$$

erfüllt die Bedingungen $\Delta G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \Delta' G_D(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$ für $z, z' > 0$, sowie $G_D|_{z=0} = G_D|_{z'=0} = 0$. Benutzen Sie G_D , um das Potenzial im ladungsfreien Halbraum $z > 0$ zu berechnen. Überzeugen Sie sich, dass im Grenzfall $z \rightarrow 0$ für $x < 0$, bzw. $x > 0$ jeweils die richtigen Randwerte herauskommen.

Hinweis: Der Normalenvektor des betrachteten Gebiets, $z > 0$, zeigt in den „Außenraum“. Es ist

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Ergebnis

Das Potenzial für das Randwertproblem wird nach längerer Rechnung schließlich

$$\Phi(x, y, z > 0) = \frac{2V}{\pi} \arctan \frac{x}{z}.$$

Im Limes $z \rightarrow 0$ strebt dieser Ausdruck gegen $V \operatorname{sgn}(x)$.

9.20 Biot-Savartsches Gesetz und Helmholtz-Spule

1. Eine unendlich dünne, kreisförmige Leiterschleife mit Radius R , werde von einem Strom I durchflossen. Berechnen Sie die magnetische Flussdichte \vec{B} auf der Symmetrieachse.
2. Betrachten Sie nun eine weitere Leiterschleife im Abstand d mit gleicher Ausrichtung. Beide Leiterschleifen werden von einem Strom I in gleicher Richtung durchflossen. Berechnen Sie die magnetische Flussdichte auf der gemeinsamen Symmetrieachse.
3. Wie muss der Abstand d gewählt werden, damit das Magnetfeld auf der gemeinsamen Symmetrieachse in der Mitte zwischen beiden Leiterschleifen möglichst homogen wird?

Ergebnisse

1. Mit der Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{x}) = I\delta(r-R)\delta(z) \begin{pmatrix} -y/r \\ x/r \\ 0 \end{pmatrix}$$

wird die magnetische Flussdichte

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{2\pi IR^2/c}{(R^2+z^2)^{3/2}} \vec{e}_z .$$

2. Das gemeinsame Felder beider Spulen auf der z -Achse wird

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{2\pi IR^2}{c} \vec{e}_z \left(\frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}} + \frac{1}{(R^2+(z-d)^2)^{3/2}} \right) .$$

3. Damit das Feld in der Mitte möglichst homogen wird, müssen möglichst viele Terme in der Taylor-Entwicklung um $z = d/2$ verschwinden. Die Untersuchung der einzelnen Terme ergibt die Bedingung

$$d = \pm R .$$

9.21 Vektorpotenzial und Eichfreiheit

Da das Magnetfeld \vec{B} divergenzfrei ist, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, kann man es immer als Rotation eines Vektorfeldes \vec{A} , dem Vektorpotenzial, darstellen,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} .$$

Da jedoch die Rotation eines Gradienten identisch verschwindet, ist die Wahl des Vektorpotenzials nicht eindeutig, d. h., für beliebige Funktionen Γ erzeugen die beiden Vektorpotenziale \vec{A} und $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Gamma$ dasselbe Magnetfeld:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Gamma = \vec{\nabla} \times \vec{A} .$$

Diese Freiheit in der Wahl des Vektorpotenzials nennt man Eichfreiheit. Sie erlaubt es, \vec{A} so zu wählen (zu „eichen“), dass Berechnungen möglichst einfach werden.

1. Welche Magnetfelder werden von den folgenden Vektorpotenzialen erzeugt:

$$\vec{A}_1(x,y,z) = \left(x^2 - yze^{-z}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \right)^T ,$$

$$\vec{A}_2(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} + \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} \right)^T ,$$

$$\vec{A}_3(x, y, z) = \left(x^2, xze^{-z} + \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} + xy(1-z)e^{-z} \right)^T,$$

$$\vec{A}_4(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+z^2)^{3/2}} + \frac{z}{(y^2+z^2)^{3/2}} \right)^T.$$

2. Wenn zwei Vektorpotenziale dasselbe Magnetfeld erzeugen unterscheiden sie sich nur um einen Gradienten $\vec{\nabla}\Gamma$,

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Gamma.$$

Für welche dieser Vektorpotenziale ist das der Fall und wie lautet in diesem Fall die Funktion Γ ?

Lösungen

- 1.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A}_1(x, y, z) &= \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} x^2 - yze^{-z} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y(z-1)e^{-z} \\ ze^{-z} - \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \\ &= \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} x^2 \\ xze^{-z} + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} + xy(1-z)e^{-z} \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_3(x, y, z), \\ \vec{\nabla} \times \vec{A}_2(x, y, z) &= \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} + \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{y}{(y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{z}{(x^2+z^2)^{3/2}} + \frac{z}{(y^2+z^2)^{3/2}} \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_4(x, y, z) \end{aligned}$$

2. Die Vektorpotenziale 1 und 3, sowie 2 und 4 sind also durch eine Eichtransformation miteinander verbunden.

Für die Vektorpotenziale 1 und 3 erhalten wir:

$$\vec{\nabla}\Gamma = \vec{A}_3 - \vec{A}_1 = \begin{pmatrix} yze^{-z} \\ xze^{-z} \\ xy(1-z)e^{-z} \end{pmatrix} = \vec{\nabla}(xyze^{-z} + c) \quad \Rightarrow \Gamma = xyze^{-z} + c.$$

Für die Vektorpotenziale 2 und 4 erhalten wir:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\Gamma &= \vec{A}_4 - \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2+z^2)^{3/2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} \\ \frac{y}{(y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} \\ \frac{z}{(x^2+z^2)^{3/2}} + \frac{z}{(y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} - \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} \end{pmatrix} \\ &= \vec{\nabla} \left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}} - \sqrt{x^2+z^2} - \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} - \sqrt{y^2+z^2} + c \right) \\ \Rightarrow \Gamma &= -\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}} - \sqrt{x^2+z^2} - \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} - \sqrt{y^2+z^2} + c.\end{aligned}$$

9.22 Magnetfeld und Vektorpotenzial

Wählt man die Funktion Γ aus Aufgabe 9.21 so, dass das Vektorpotenzial divergenzfrei ist, $\vec{\nabla}\vec{A} = 0$ (Coulomb-Eichung), erhält man folgenden Zusammenhang zwischen \vec{A} und der Stromdichte \vec{j} ,

$$\vec{A} = \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')/c}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (1)$$

Dies ist vollkommen analog zum Zusammenhang zwischen dem elektrostatischen Potenzial Φ und der Ladungsdichte ρ .

Ein unendlich dünner Draht in Form eines geschlossenen Quadrats der Seitenlänge $2a$ liege in der xy -Ebene mit Mittelpunkt im Ursprung. Er werde von einer Stromstärke I gegen den Uhrzeigersinn durchflossen.

1. Wie lautet die zugehörige Stromdichte \vec{j} ?
2. Berechnen Sie das Vektorpotenzial \vec{A} gemäß Gl. (1) im gesamten Raum.
3. Berechnen Sie das Magnetfeld \vec{B} auf der z -Achse mithilfe von $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Lösungen

1. Die Stromdichte ist

$$\vec{j}(\vec{x}) = I\delta(z) \begin{pmatrix} \Theta(a-|x|)(\delta(y+a) - \delta(y-a)) \\ \Theta(a-|y|)(\delta(x-a) - \delta(x+a)) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Das Vektorpotenzial lautet

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &= \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')/c}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \frac{I}{c} \int \frac{dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}} \begin{pmatrix} \Theta(a-|x'|)(\delta(y'+a) - \delta(y'-a)) \\ \Theta(a-|y'|)(\delta(x'-a) - \delta(x'+a)) \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Zunächst nur die x -Komponente:

$$\begin{aligned}A_x(\vec{x}) &= \frac{I}{c} \int_{-a}^a dx' \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y+a)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-a)^2 + z^2}} \right) \\ &= \frac{I}{c} \left(\operatorname{arsinh} \frac{x'-x}{\sqrt{(y+a)^2 + z^2}} - \operatorname{arsinh} \frac{x'-x}{\sqrt{(y-a)^2 + z^2}} \right) \Big|_{-a}^a \\ &= \frac{I}{c} \left(\operatorname{arsinh} \frac{a-x}{\sqrt{(y+a)^2 + z^2}} + \operatorname{arsinh} \frac{a+x}{\sqrt{(y+a)^2 + z^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{arsinh} \frac{a-x}{\sqrt{(y-a)^2 + z^2}} - \operatorname{arsinh} \frac{a+x}{\sqrt{(y-a)^2 + z^2}} \right).\end{aligned}$$

Die y -Komponente wird analog

$$\begin{aligned}A_y(\vec{x}) &= -\frac{I}{c} \left(\operatorname{arsinh} \frac{a-y}{\sqrt{(x+a)^2 + z^2}} + \operatorname{arsinh} \frac{a+y}{\sqrt{(x+a)^2 + z^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{arsinh} \frac{a-y}{\sqrt{(x-a)^2 + z^2}} - \operatorname{arsinh} \frac{a+y}{\sqrt{(x-a)^2 + z^2}} \right).\end{aligned}$$

3. Aus Symmetriegründen verschwinden die x - und y -Komponente auf der z -Achse.

Die z -Komponente ist

$$B_z(0, 0, z) = (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \Big|_{x=y=0}.$$

Wegen

$$\begin{aligned}\partial_x \operatorname{arsinh} \frac{a \pm y}{\sqrt{(x \pm a)^2 + z^2}} \Big|_{x=y=0} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(a \pm y)^2}{(x \pm a)^2 + z^2}}} \frac{-(a \pm y)(x \pm a)}{((x \pm a)^2 + z^2)^{3/2}} \Big|_{x=y=0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a^2 + z^2}} \frac{-(a \pm y)(x \pm a) \Big|_{x=y=0}}{a^2 + z^2}\end{aligned}$$

erhalten wir 8-mal denselben Term:

$$B_z(0, 0, z) = \frac{8I}{c} \frac{1}{\sqrt{2a^2 + z^2}} \frac{a^2}{a^2 + z^2}.$$

9.23 Allgemeiner Lorentz-Boost

1. Berechnen Sie die Matrix

$$\Lambda = \exp[-y^i T_i], \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (*) \quad (2)$$

wobei

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die T_i stellen drei von sechs Matrizen dar, die „Generatoren der Lorentz-Gruppe“ heißen. $T_{1,2,3}$ generieren Lorentz-Boosts, die anderen drei Rotationen.

2. Zeigen Sie, dass Λ eine Transformationsmatrix für Lorentz-Transformationen darstellt, indem Sie zeigen, dass Sie die Minkowski-Metrik invariant lässt,

$$\Lambda^T g \Lambda = g.$$

3. Zeigen Sie mithilfe von Gl. (*), dass Λ eine eigentliche Lorentz-Transformation bewirkt, also dass $\det \Lambda = 1$.

Hinweis: Benutzen Sie die Identität

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Lösungen

1. Wir schreiben $y = |\vec{y}|$ und $\vec{n} = \vec{y}/y$, sowie

$$A = \vec{n} \vec{T} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{n}^T \\ \vec{n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter definieren wir die Projektoren P_n und h_n , parallel und senkrecht zu \vec{n} ,

$$\begin{aligned} P_n &= \vec{n} \otimes \vec{n}, & \text{bzw.} & & P_n^i{}_j &= n^i n_j, \\ h_n &= \mathbb{1} - \vec{n} \otimes \vec{n}, & \text{bzw.} & & h_n^i{}_j &= \delta^i{}_j - n^i n_j. \end{aligned}$$

Sie haben die Eigenschaften

$$P_n \vec{n} = \vec{n}, \quad P_n P_n = P_n, \quad h_n \vec{n} = 0, \quad h_n h_n = h_n, \quad h_n P_n = 0.$$

Wir erhalten somit

$$A^{2n} = (A^2)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix}, \quad A^{2n+1} = AA^{2n} = A.$$

Die Entwicklung der Exponentialfunktion ergibt

$$\begin{aligned} \Lambda = e^{-yA} &= \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!} A^2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_n \end{pmatrix} + \cosh y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix} - \sinh y \begin{pmatrix} 0 & \vec{n}^T \\ \vec{n} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh y & -\vec{n}^T \sinh y \\ -\vec{n} \sinh y & P_n \cosh y + h_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit $\gamma = \cosh y$ und $\gamma \vec{\beta} = \vec{n} \sinh y$ erhalten wir

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \vec{\beta}^T \\ -\gamma \vec{\beta} & \gamma P_n + h_n \end{pmatrix}.$$

2. Aus den oben genannten Eigenschaften von P_n und h_n folgt

$$\begin{aligned} \Lambda^T g \Lambda &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \vec{\beta}^T \\ -\gamma \vec{\beta} & \gamma P_n + h_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \vec{\beta}^T \\ -\gamma \vec{\beta} & \gamma P_n + h_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \vec{\beta}^T \\ -\gamma \vec{\beta} & -\gamma P_n - h_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \vec{\beta}^T \\ -\gamma \vec{\beta} & \gamma P_n + h_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^2(1 - \vec{\beta}^2) & -\gamma^2 \vec{\beta}^T + \gamma^2 \vec{\beta}^T P_n + \gamma \vec{\beta}^T h_n \\ \gamma^2 \vec{\beta}^T - \gamma^2 \vec{\beta}^T P_n - \gamma \vec{\beta}^T h_n & \gamma^2 \vec{\beta} \vec{\beta}^T - \gamma^2 P_n - h_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -P_n - h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = g. \end{aligned}$$

3. Wir schreiben

$$\det \Lambda = \det(e^{-yA}) = \det \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{yA}{m} \right)^m \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\det \left(1 - \frac{yA}{m} \right) \right)^m.$$

Die Determinante können wir entwickeln und erhalten

$$\begin{aligned} \det\left(1 - \frac{yA}{m}\right) &= \begin{vmatrix} 1 & -y^1/m & -y^2/m & -y^3/m \\ -y^1/m & 1 & 0 & 0 \\ -y^2/m & 0 & 1 & 0 \\ -y^3/m & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -y^1/m & -y^2/m \\ -y^1/m & 1 & 0 \\ -y^2/m & 0 & 1 \end{vmatrix} - \frac{-y^3}{m} \begin{vmatrix} -y^1/m & -y^2/m & -y^3/m \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 - \frac{\bar{y}^2}{m^2} = \left(1 + \frac{y}{m}\right) \left(1 - \frac{y}{m}\right). \end{aligned}$$

Für die Determinante von Λ erhalten wir dann

$$\det \Lambda = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{m}\right)^m \left(1 - \frac{y}{m}\right)^m = e^y e^{-y} = 1.$$

9.24 Lebensdauer von Myonen

Myonen sind elektromagnetisch und schwach wechselwirkende Teilchen (Leptonen) mit einer Masse von $106 \text{ MeV}/c^2$ und einer Lebensdauer von $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$. In ihrem Ruhesystem ist die Anzahl der Myonen gegeben durch $N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$. Auf Meereshöhe beträgt ihre Flussdichte $100 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sterad}^{-1}$ und typische Myon-Impulse liegen bei $1 \text{ GeV}/c$. Die Myonen entstehen in etwa 12 km Höhe durch die Reaktion von hochenergetischen Teilchen der kosmischen Strahlung, die mit einer Flussdichte von circa $1000 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sterad}^{-1}$ bei Energien oberhalb 1 GeV auf die Atmosphäre treffen.

1. Berechnen Sie Energie, Lorentz-Faktor und Geschwindigkeit für ein Myon mit Impuls $1 \text{ GeV}/c$.
2. Vereinfachend nehmen wir an, alle Myonen bewegen sich mit $1 \text{ GeV}/c$ senkrecht zur Erdoberfläche. Wie groß ist dann die Flussdichte der Myonen in 12 km Höhe, wenn man relativistische Effekte ignoriert, und wie groß, wenn man sie beachtet? Welches Ergebnis passt besser zur Flussdichte der kosmischen Strahlung?

Lösungen

1. Energie: $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = 1006 \text{ MeV}$. Lorentz-Faktor: $\gamma = E/(mc^2) = 9,49$. Geschwindigkeit: $\beta = pc/E = 0,994$.

2. Von der Erde aus betrachtet brauchen die Myonen für die 12 km lange Reise mit $\beta = 0,994$ die Zeit $t = 40,3 \mu\text{s}$. Unter Missachtung der SRT setzen wir zunächst die Lebensdauer bewegter und ruhender Myonen gleich. Dann wäre die Teilchenstromdichte

$$\dot{n}_{\text{Atmosphäre}} = \dot{n}_{\text{Erde}} e^{t/\tau_{\text{ruhend}}} = 8,8 \cdot 10^9 \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sterad}^{-1}.$$

Setzen wir jedoch SRT-gemäß $\tau_{\text{bewegt}} = \gamma \tau_{\text{ruhend}} = 20,9 \mu\text{s}$, so erhalten wir

$$\dot{n}_{\text{Atmosphäre}} = \dot{n}_{\text{Erde}} e^{t/\tau_{\text{bewegt}}} = 6,9 \cdot 10^2 \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sterad}^{-1}.$$

Das Ergebnis der nichtrelativistischen Rechnung fällt also mehrere Größenordnungen zu hoch aus.

9.25 Zeitdilatation: Myonen im Speicherring

In einem Speicherring von 14 m Durchmesser kreisen Myonen mit einem Impuls von 3 GeV/c. Die Masse ruhender Myonen ist $0,106 \text{ GeV}/c^2$, die mittlere Lebensdauer $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$. Wie groß ist ihre Lebensdauer im Speicherring, d. h. bei Berücksichtigung der relativistischen Zeitdilatation?

Lösung

Die Energie der Myonen ist $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = 3,002 \text{ GeV}$, der Lorentz-Faktor demnach $\gamma = E/(mc^2) = 28,3$. Die Lebensdauer der Myonen im Speicherring wird damit $\tau = \gamma \tau_0 = 62,3 \mu\text{s}$.

Bemerkung: Das SRT-Ergebnis wurde bereits 1977 am Myonen-Speicherring des europäischen Forschungszentrums CERN in Genf mit hoher Genauigkeit experimentell bestätigt. In Experimenten mit Li-Ionen im Speicherring ESR in Darmstadt konnte man 2014 die SRT-Zeitdilatation auf $\pm 2,3 \cdot 10^{-9}$ genau messen, s. Abschn. 4.1.

9.26 Geschwindigkeitsaddition und Rapidität

Betrachten wir zur Vereinfachung nur eine Raumdimension: Der Wechsel von einem Koordinatensystem in ein zweites, mit Relativgeschwindigkeit βc in x -Richtung, lässt sich

am einfachsten mit einer Transformationsmatrix $\Lambda(\beta)$ durchführen,

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \Lambda(\beta) \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}, \quad \Lambda(\beta) = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Solch eine Transformation nennt man (Lorentz-)Boost.

1. Berechnen Sie die kombinierte Transformationsmatrix $\Lambda(\beta) = \Lambda(\beta_2)\Lambda(\beta_1)$ für zwei aufeinander folgende Boosts mit Geschwindigkeiten $c\beta_{1,2}$ in x -Richtung. Wie lautet der Zusammenhang zwischen β und β_1, β_2 ?
2. Zeigen Sie, dass $|\beta| < 1$, wenn $|\beta_{1,2}| < 1$.
3. Alternativ kann man einen Boost auch als Pseudorotation darstellen. Für einen Boost in x -Richtung gilt dann

$$\Lambda(\beta) \rightarrow \Lambda(y) = \begin{pmatrix} \cosh y & -\sinh y \\ -\sinh y & \cosh y \end{pmatrix} \quad (*)$$

mit der Rapidität y . Wie lautet der Zusammenhang zwischen β und y ? Welcher Zusammenhang ergibt sich im nichtrelativistischen Limes?

4. Berechnen Sie die kombinierte Transformationsmatrix $\Lambda(y) = \Lambda(y_2)\Lambda(y_1)$. Wie lautet der Zusammenhang zwischen y und $y_{1,2}$?

Lösungen

1.

$$\begin{aligned} \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} &= \gamma_1 \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 & -\beta_2 \\ -\beta_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 \\ -\beta_1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \gamma_1 \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 + \beta_1 \beta_2 & -\beta_1 - \beta_2 \\ -\beta_1 - \beta_2 & 1 + \beta_1 \beta_2 \end{pmatrix} \\ &= \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \\ -\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}.$$

2. Sei $|\beta_{1,2}| < 1$, dann folgt

$$\partial_{\beta_{1,2}}\beta = \frac{1 - \beta_{2,1}^2}{(1 + \beta_1\beta_2)^2} > 0.$$

β ist also streng monoton steigend in $\beta_{1,2}$. Außerdem ist

$$\lim_{\beta_{1,2} \rightarrow \pm 1} \beta = \pm 1$$

und daher $|\beta| < 1$ für $|\beta_{1,2}| < 1$.

3. Durch Vergleich sieht man, dass

$$\cosh y = \gamma, \quad \sinh y = \beta\gamma \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\sinh y}{\cosh y} = \tanh y.$$

Im nichtrelativistischen Limes ist $\beta \approx y$.

4. Mit den Abkürzungen $c = \cosh$, $s = \sinh$ wird

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} cy & -sy \\ -sy & cy \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} cy_1 & -sy_1 \\ -sy_1 & cy_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cy_2 & -sy_2 \\ -sy_2 & cy_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} cy_1cy_2 + sy_1sy_2 & -sy_1cy_2 - sy_2cy_1 \\ -sy_1cy_2 - sy_2cy_1 & cy_1cy_2 + sy_1sy_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c(y_1 + y_2) & -s(y_1 + y_2) \\ -s(y_1 + y_2) & c(y_1 + y_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und daher $y = y_1 + y_2$.

9.27 Beschleunigte Bewegung

Zwei Raumschiffe, RS1 und RS2, befinden sich direkt nebeneinander und in Ruhe zueinander. Die Besatzung von RS2 stellt die Triebwerke so ein, dass sie die konstante Beschleunigung g in x -Richtung erfahren. Die Transformation ins Ruhesystem von RS2 geschieht am einfachsten mit der Matrix $\Lambda(y(\tau))$ aus Gl. (*) in 9.26, wenn man $y = g\tau/c$ setzt, mit der Eigenzeit τ von RS2. Die Besatzung sieht RS1 also mit der Vierergeschwindigkeit

$$u^\mu(\tau) = \Lambda^\mu{}_\nu(\tau)u^\nu(0), \quad (u^\nu)(0) = (c, 0, 0, 0)^T$$

in negativer x -Richtung hinweggleiten.

1. Zeigen Sie an diesem Beispiel, dass

$$u^2 = g_{\mu\nu}u^\mu(\tau)u^\nu(\tau) = c^2 \quad \text{und} \quad u \cdot a = g_{\mu\nu}u^\mu(\tau)a^\nu(\tau) = 0,$$

mit der Viererbeschleunigung $a^\mu = du^\mu/d\tau$. Zeigen Sie, dass die zweite Identität auch ganz allgemein aus der ersten folgt.

2. Zeigen Sie an diesem Beispiel, dass die Viererbeschleunigung sich schreiben lässt als $a^\mu = M^\mu{}_\nu u^\nu$ und berechnen Sie die Matrix M .
3. Welche Strecke hat RS2 zurückgelegt, wenn es die Geschwindigkeit v relativ zu RS1 erreicht hat?

Lösungen

1. Im Ruhesystem von RS2 entfernt sich RS1 mit einer Vierergeschwindigkeit

$$u(\tau) = \begin{pmatrix} \cosh(g\tau/c) & -\sinh(g\tau/c) \\ -\sinh(g\tau/c) & \cosh(g\tau/c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cosh(g\tau/c) \\ -c \sinh(g\tau/c) \end{pmatrix}.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} u^2 &= g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = (c \cosh(g\tau/c), -c \sinh(g\tau/c)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \cosh(g\tau/c) \\ -c \sinh(g\tau/c) \end{pmatrix} \\ &= c^2 (\cosh^2(g\tau/c) - \sinh^2(g\tau/c)) = c^2. \end{aligned}$$

Die Viererbeschleunigung ist dann

$$\begin{aligned} a &= \frac{du}{d\tau} = g \begin{pmatrix} \sinh(g\tau/c) \\ -\cosh(g\tau/c) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow u \cdot a &= (c \cosh(g\tau/c), -c \sinh(g\tau/c)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \sinh(g\tau/c) \\ -g \cosh(g\tau/c) \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Die erste Beziehung impliziert die zweite, da

$$0 = \frac{dc^2}{d\tau} = \frac{du^2}{d\tau} = \frac{dg_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}{d\tau} = 2g_{\mu\nu} u^\mu \frac{du^\nu}{d\tau} = 2u \cdot \frac{du}{d\tau} = 2u \cdot a.$$

- 2.

$$a = g \begin{pmatrix} \sinh(g\tau/c) \\ -\cosh(g\tau/c) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(g\tau/c) \\ -\sinh(g\tau/c) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Mu.$$

Die Matrix M ist also proportional zum Generator für Boosts in x -Richtung.

3. Nachdem die Eigenzeit $\tau = T$ vergangen ist, entfernt sich das unbeschleunigte Raumschiff mit $u^T(T) = (\gamma c, \gamma v)$, wobei $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$,

$$\Rightarrow \cosh(gT/c) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \sinh(gT/c) = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Die Strecke, die in dieser Zeit zurückgelegt wurde ist

$$L = \int_0^T d\tau |u^1(\tau)| = \int_0^T d\tau c \sinh(g\tau/c) = \frac{c^2}{g} (\cosh(gT/c) - 1) = \frac{c^2}{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right).$$

9.28 Relativistische Kinematik

Betrachten Sie den Zerfall eines Teilchens der Masse M in zwei Teilchen der Massen m_1 und m_2 im Ruhesystem des zerfallenden Teilchens.

1. Bestimmen Sie Energie und Impuls der Teilchen unter Verwendung der relativistischen Energieimpuls Beziehung und der Erhaltung des Viererimpulses.
2. Ein Z -Boson mit Masse $M_Z = 91,2 \text{ GeV}/c^2$ zerfalle in zwei Tauonen mit Masse $m_\tau = 1,8 \text{ GeV}/c^2$. Berechnen Sie Energie und Impuls der Tauonen im Ruhesystem des Z -Bosons.
3. Welche Ergebnisse erhalten Sie für ein Pion ($M_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$), welches in ein Myon ($m_\mu = 106 \text{ MeV}/c^2$) und ein Myon-Antineutrino ($m_\nu \simeq 0$) zerfällt?

Ergebnisse

1. Die Viererimpulserhaltung liefert (hier $c = 1$)

$$E_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M}$$

$$E_1 = M - E_2 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}.$$

Der Impuls der Zerfallsteilchen wird

$$|\vec{p}|^2 = E_2^2 - m_2^2 = \frac{M^4 - 2M^2(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2}{4M^2}.$$

2.

$$E_\tau = 45,6 \text{ GeV}, \quad p_\tau = 45,56 \text{ GeV}/c \approx 45,6 \text{ GeV}/c .$$

3.

$$E_\mu = 110 \text{ MeV}, \quad |\vec{p}|_\nu = |\vec{p}|_\mu = 30 \text{ MeV}/c .$$

9.29 Transformation der Felder

Ladungsdichte ρ und Stromdichte \vec{j} lassen sich zur Viererstromdichte, $(j^\mu) = (\rho c, \vec{j})$, zusammenfassen. Diese verhält sich unter Lorentz-Transformationen gemäß $j'^\mu = \Lambda^\mu_\nu j^\nu$.

Gegeben sei ein Koordinatensystem KS in welchem ein unendlich langer, dünner Draht entlang der x^3 -Achse verlaufe. Die positiven Ladungsträger („Atomrümpfe“) im Draht ruhen in KS und tragen die homogene Linienladungsdichte λ . Die Elektronen dagegen tragen die homogene Linienladungsdichte $-\lambda$ und bewegen sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = -v\vec{e}_3$.

1. Wie lauten die zugehörigen Viererstromdichten j_-^μ und j_+^μ der Elektronen bzw. positiven Ladungsträger? Welche \vec{E} - und \vec{B} -Felder werden von ihnen gemeinsam erzeugt?
2. Transformieren Sie ins Ruhesystem der Elektronen (KS'). Wie lauten hier die Viererstromdichten? Berechnen Sie daraus die Felder \vec{E}' - und \vec{B}' . Stimmen die Ergebnisse mit den allgemeinen Formeln für die Transformation der Felder überein?
3. In KS' scheint die Situation analog zu KS zu sein, nur dass sich jetzt die positiven Ladungsträger bewegen und die negativen ruhen. Dennoch tritt jetzt, wie in b) berechnet, ein \vec{E} -Feld auf. Erklären Sie das Phänomen qualitativ und quantitativ indem Sie die transformierten Viererstromdichten betrachten.

Lösungen

1. Mit $\beta = v/c$ haben wir

$$(j_-^\mu) = -\lambda c \delta(x) \delta(y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\beta \end{pmatrix}, \quad (j_+^\mu) = \lambda c \delta(x) \delta(y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (j^\mu) = \lambda c \delta(x) \delta(y) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix},$$

wobei $j = j_+ + j_-$ die Gesamtstromdichte ist. Gemäß

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int d^3y \rho(\vec{y}) \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3}, \quad \vec{B}(\vec{x}) = \int d^3y \vec{j}(\vec{y})/c \times \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3},$$

erhalten wir $\vec{E} = 0$ und

$$\vec{B}(\vec{x}) \stackrel{w=y^3-x^3}{=} \lambda\beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{(x^{1^2} + x^{2^2} + w^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -x^2 \\ x^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2\lambda\beta}{x^{1^2} + x^{2^2}} \begin{pmatrix} -x^2 \\ x^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2\lambda\beta}{R} \vec{e}_\varphi.$$

2. Der Boost entlang der negativen x^3 -Achse bringt

$$(j_-^\mu) = -\frac{\lambda c}{\gamma} \delta(x) \delta(y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (j_+^\mu) = \gamma \lambda c \delta(x) \delta(y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (j'^\mu) = \gamma \beta \lambda c \delta(x) \delta(y) \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Das \vec{E} -Feld eines Drahtes haben wir in 9.8 berechnet; damit wird

$$\vec{E}'(\vec{x}) = \frac{2\lambda\gamma\beta^2}{R} \vec{e}_R = \frac{2\gamma\beta^2\lambda}{R'} \vec{e}_{R'} = \vec{E}'(\vec{x}'), \quad \vec{B}(\vec{x}') = \frac{2\lambda\gamma\beta}{R'} \vec{e}_\varphi'.$$

Die allgemeine Formel für die Transformation der Felder lautet

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, & \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel}, \\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{\beta} \times \vec{B}), & \vec{B}'_{\perp} &= \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{\beta} \times \vec{E}). \end{aligned}$$

Entsprechend erwarten wir $\vec{E}'_{\perp} = \gamma\vec{\beta} \times \vec{B}$ und $\vec{B}'_{\perp} = \gamma\vec{B}_{\perp}$, was hier offensichtlich gegeben ist.

3. Anhand der Ausdrücke für die Stromdichten in KS und KS' sehen wir Folgendes: In KS sind die Linienladungsdichten ausgeglichen, d. h., es befinden sich gleich viele positive und negative Ladungen pro Längeneinheit im Draht. Bei der Transformation nach KS' findet jedoch eine Längenkontraktion für die Abstände der Atomrümpfe statt und daher $\lambda = Q/L \rightarrow Q/L' = \gamma Q/L = \gamma\lambda$, da diese sich nun bewegen. Für die Elektronen dagegen findet eine inverse Längenkontraktion statt, da diese nun ruhen, $\lambda = Q/L \rightarrow Q/L' = \gamma^{-1}Q/L = \gamma^{-1}\lambda$. Da die Zahl der Elektronen pro Längeneinheit nun unter der Zahl der Atomrümpfe liegt, trägt der Draht nun insgesamt die Linienladungsdichte $\lambda' = \lambda(\gamma - \gamma^{-1}) = \lambda\gamma\beta^2$. Die Ladung ist also kein Lorentz-Skalar.

9.30 Schwerpunkt- und Laborsystem

Betrachten Sie zwei Positronen e_1^+ und e_2^+ in einem Teilchenstrahl am SLAC. Zwei Koordinatensysteme sind hierbei relevant: Das Schwerpunktsystem der beiden Positronen, CMS (= Center-of-mass-system), und das Laborsystem, LS.

Im LS haben die Positronen im Strahl eine Energie von je 50 GeV ($\gamma \approx 10^5$) und bewegen sich beide in positiver Richtung auf der x -Achse, e_1^+ vor e_2^+ .

Im CMS befinden sich die beiden Positronen ebenfalls auf der x -Achse, zunächst in einem Abstand d zueinander, und können als nichtrelativistisch betrachtet werden.

1. Geben Sie das \vec{E} - und \vec{B} -Feld sowie die Kraft \vec{F} und Beschleunigung $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ an, die e_1^+ aufgrund von e_2^+ erfährt, wenn man die Situation im CMS und im LS betrachtet.
2. Wie ändern sich diese Größen, wenn sich die beiden Positronen nicht hintereinander, sondern nebeneinander (mit Abstand d im CMS) befinden?

Hinweis: Die zeitliche Änderung des γ -Faktors lautet:

$$mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = \vec{F} \vec{v}.$$

Lösungen

1. Sei CMS das gestrichene und LS das ungestrichene System. Im CMS seien $\vec{x}_{1,2}$ die Positionen von $e_{1,2}^+$

$$\vec{x}'_1 - \vec{x}'_2 = d \vec{e}'_x,$$

dann ergibt sich

$$\vec{E}' = \frac{e}{d^2} \vec{e}'_x, \quad \vec{B}' = 0, \quad \vec{F}' = \frac{e^2}{d^2} \vec{e}'_x,$$

$$\frac{d\gamma' \vec{v}'}{dt'} \approx \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \vec{a}' = \frac{e^2}{md^2} \vec{e}'_x.$$

Für die Beschleunigung wurde ausgenutzt, dass die beiden Positionen im CMS nichtrelativistisch behandelt werden können, d. h. der γ -Faktor aufgrund der Eigenbewegung sehr nahe bei eins liegt.

Mit der Transformation der Felder erhalten wir im LS sofort

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}, \quad \vec{E}_{\perp} = 0, \quad \vec{B} = 0, \quad \vec{F} = \vec{F}'.$$

Für die Beschleunigung ergibt sich mit $mc^2\dot{\gamma} = \vec{F}\vec{v}$,

$$m\frac{d\gamma\vec{v}}{dt} = (\vec{F}\vec{\beta})\vec{\beta} + m\gamma\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \frac{1-\beta^2}{m\gamma}\vec{F} = \frac{\vec{a}'}{\gamma^3}.$$

Die Beschleunigung durch die Coulomb-Abstoßung ist im LS also um einen Faktor $\sim 10^{15}$ kleiner.

2. Im CMS ist

$$\vec{x}'_1 - \vec{x}'_2 = d\vec{e}'_y.$$

Damit folgt

$$\vec{E}' = \frac{e}{d^2}\vec{e}'_y, \quad \vec{B}' = 0,$$

$$\vec{F}' = \frac{e^2}{d^2}\vec{e}'_y, \quad \vec{a}' = \frac{e^2}{md^2}\vec{e}'_y.$$

Im LS wird (Boost mit $-\vec{\beta}$)

$$\vec{E}_{\parallel} = 0, \quad \vec{B}_{\parallel} = 0, \quad \vec{E}_{\perp} = \gamma\vec{E}'_{\perp}, \quad \vec{B}_{\perp} = +\gamma\vec{\beta} \times \vec{E}' = +\frac{\gamma\beta e}{d^2}\vec{e}'_z.$$

Die Kraft wird

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) = e\gamma(1-\beta^2)\vec{E}' = \frac{\vec{F}'}{\gamma}.$$

Wegen $\vec{F}\vec{\beta} = 0$ ist γ eine Konstante der Bewegung, so dass sich für die Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}'}{\gamma^2 m} = \frac{\vec{a}'}{\gamma^2}$$

ergibt. Auch diese ist stark gedämpft, etwa um einen Faktor $\sim 10^{10}$.

9.31 Feldstärketensor

Der Feldstärketensor F und der duale Feldstärketensor \tilde{F} sind definiert durch

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}, \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma},$$

mit dem Vierervektorpotenzial A und dem Levi-Civita-Tensor ε ($\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = 1$).

1. Drücken Sie $F_{\mu\nu}$, $F^{\mu\nu}$, $\tilde{F}_{\mu\nu}$ und $\tilde{F}^{\mu\nu}$ mithilfe von \vec{E} und \vec{B} aus.

2. Berechnen Sie damit $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ und $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$.
3. Aus der Transformation des Feldstärketensors, $F'_{\mu\nu} = F_{\rho\sigma}\Lambda^\rho{}_\mu\Lambda^\sigma{}_\nu$, folgen die transformierten Felder

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{\beta} \times \vec{B}), \quad \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{\beta} \times \vec{E}).$$

Zeigen Sie dies explizit für einen Boost in x -Richtung.

4. Zeigen Sie allgemein anhand der Gleichungen in (c), dass

$$\vec{E}'^2 - \vec{B}'^2 = \vec{E}^2 - \vec{B}^2, \quad \vec{E}' \vec{B}' = \vec{E} \vec{B}.$$

Ergebnisse

- 1.

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\tilde{F}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B^1 & B^2 & B^3 \\ -B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ -B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ -B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\tilde{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 2.

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2),$$

$$F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -4\vec{E}\vec{B}.$$

3. Die Transformationsmatrix ist

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die transformierten Felder sind

$$\vec{E}' = \begin{pmatrix} F'_{01} \\ F'_{02} \\ F'_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Lambda^0_0 \Lambda^1_1 - \Lambda^0_1 \Lambda^1_0) F_{01} \\ (\Lambda^0_0 F_{02} + \Lambda^1_0 F_{12}) \Lambda^2_2 \\ (\Lambda^0_0 F_{03} + \Lambda^1_0 F_{13}) \Lambda^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^1 \\ \gamma(E^2 + \beta B^3) \\ \gamma(E^3 - \beta B^2) \end{pmatrix},$$

$$\vec{B}' = \begin{pmatrix} F'_{32} \\ F'_{13} \\ F'_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^3_3 \Lambda^2_2 F_{32} \\ (\Lambda^1_1 F_{13} + \Lambda^0_1 F_{03}) \Lambda^3_3 \\ (\Lambda^1_1 F_{21} + \Lambda^0_1 F_{20}) \Lambda^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^1 \\ \gamma(B^2 - \beta E^3) \\ \gamma(B^3 + \beta E^2) \end{pmatrix}.$$

4. Die Lorentz-Skalare ändern sich nicht,

$$\vec{E}'^2 - \vec{B}'^2 = \vec{E}^2 - \vec{B}^2$$

$$\vec{E}' \vec{B}' = \vec{E} \vec{B}.$$

(In der expliziten Rechnung wird $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{c}(\vec{b} \times \vec{a})$ und $(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c})$ benutzt.)

9.32 Teilchen im elektromagnetischen Feld

Gegeben sei ein (nichtrelativistisches) Teilchen mit Ladung q in einem elektromagnetischen Feld. Die Lagrangefunktion des Teilchens ist

$$L(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 + \frac{q}{c} \dot{\vec{x}} \vec{A}(t, \vec{x}) - q \Phi(t, \vec{x}).$$

1. Bestimmen Sie den kanonischen Impuls \vec{p} . Wie hängt \vec{p} mit dem kinetischen Impuls $m\dot{\vec{x}}$ zusammen? Bestimmen Sie mithilfe der Legendre-Transformation die zugehörige Hamilton-Funktion

$$H(t, \vec{x}, \vec{p}) = \vec{p} \dot{\vec{x}} - L(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}), \quad p_i = \frac{\partial L(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})}{\partial \dot{x}^i}.$$

2. Leiten Sie aus den Hamilton'schen Gleichungen

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad \dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

die Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld her,

$$m\ddot{\vec{x}} = q(\vec{E} + (\dot{\vec{x}}/c) \times \vec{B}).$$

Hinweis: Aus $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ folgt die Identität $(\dot{\vec{x}} \times \vec{B})^i = \dot{x}_j (\partial^i A^j - \partial^j A^i)$.

Ergebnisse

1.

$$\vec{p} = \vec{\nabla}_{\dot{\vec{x}}} L = m\dot{\vec{x}} + \frac{q}{c}\vec{A}, \quad \Rightarrow \quad m\dot{\vec{x}} = \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}.$$

\vec{p} ist also nicht identisch mit dem kinetischen Impuls. Die Hamiltonfunktion wird

$$H = \frac{(\vec{p} - (q/c)\vec{A})^2}{2m} + q\Phi.$$

2.

$$m\ddot{\vec{x}} = q(\vec{E} + (\dot{\vec{x}}/c) \times \vec{B}).$$

(Bei der expliziten Rechnung wird $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$ benutzt.)

9.33 Relativistische Lagrange- und Hamilton-Funktion

Gegeben sei ein Teilchen mit Ladung q in einem Potenzial V . Die relativistische Lagrange- bzw. Hamilton-Funktion des Teilchens ist ($\dot{\vec{x}} = d\vec{x}/dt$)

$$L(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = -mc^2\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2} - V(\vec{x}), \quad H(t, \vec{x}, \vec{p}) = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} + V(\vec{x}).$$

1. Zeigen Sie, dass L und H im Grenzfall $|\dot{\vec{x}}| \ll c$ bzw. $|\vec{p}| \ll mc$ die bekannten nicht-relativistischen Formen annehmen. Wie lautet der Zusammenhang zwischen $\dot{\vec{x}}$ und \vec{p} ?
2. Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen und die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen die Form von verallgemeinerten Newton'schen Bewegungsgleichungen haben.
3. Sei nun $V(\vec{x}) = -q\vec{E}\vec{x}$, mit $\vec{E} = E\vec{e}_z$, das Potenzial eines homogenen elektrischen Feldes in z -Richtung. Berechnen Sie $\dot{\vec{x}}(t)$, $\vec{p}(t)$ und $\vec{x}(t)$ zu den Anfangsbedingungen $\vec{x}(0) = \dot{\vec{x}}(0) = (0, 0, 0)^T$.

Lösungen

1. Da $\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm x/2$ für $x \ll 1$ erhalten wir

$$L \approx -mc^2 + \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}), \quad H \approx mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}).$$

Die Bewegungsgleichungen ändern sich nicht, wenn man eine totale zeitliche Ableitung df/dt zur Lagrange-/Hamilton-Funktion addiert. Das Ergebnis ist deshalb äquivalent zur üblichen nichtrelativistischen Form.

Verallgemeinerte Impulse und Geschwindigkeiten hängen zusammen über:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{\nabla}_p H = \frac{\vec{p}c}{\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}}, \quad \vec{p} = \vec{\nabla}_{\dot{\vec{x}}} L = \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}}.$$

2. Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind

$$\frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\dot{\vec{x}}} L = \vec{\nabla} L \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} = -\vec{\nabla} V(\vec{x}).$$

Sie entsprechen den Newton'schen Bewegungsgleichungen mit Impuls $m\dot{\vec{x}}/(1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2)^{1/2}$.

Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen sind

$$\dot{\vec{x}} = \vec{\nabla}_p H \stackrel{\text{s.o.}}{=} \frac{\vec{p}c}{\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}}, \quad \dot{\vec{p}} = -\vec{\nabla} V(\vec{x}).$$

Der einzige Unterschied zu den bekannten Newton'schen Bewegungsgleichungen ist die veränderte Beziehung zwischen \vec{p} und $\dot{\vec{x}}$.

3. Es gibt zwei Lösungswege. Am einfachsten ist das Hamilton'sche System:

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\vec{p}c}{\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}}, \quad \dot{\vec{p}} = qE\vec{e}_z.$$

Da $\dot{p}_{x,y} \equiv 0$, gilt $p_{x,y}(t) = p_{x,y}(0) = \text{const} \propto \dot{x}(0)$, $\dot{y}(0) = 0$. Also $\dot{x}, \dot{y}, p_x, p_y \equiv 0$. Weiter ist $p_z(t) = p_z(0) + qEt$. Da jedoch $\dot{z}(0) = 0$ erhalten wir

$$\dot{z}(t) = \frac{qEt}{\sqrt{m^2c^2 + (qEt)^2}}, \quad p_z(t) = qEt.$$

Im Lagrange-Formalismus gilt

$$\frac{d\gamma\dot{x}}{dt} = \frac{d\gamma\dot{y}}{dt} = 0.$$

Integration zusammen mit den Anfangsbedingungen ergibt $\dot{x}(t) = \dot{y}(t) = 0$ und damit auch $p_{x,y} = 0$. In der z -Komponente ist

$$\frac{d\gamma\dot{z}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{z}}{\sqrt{1 - \dot{z}^2/c^2}} \right) = \frac{qE}{m}.$$

Integrieren ergibt

$$\frac{\dot{z}}{\sqrt{1 - \dot{z}^2/c^2}} = \frac{qEt}{m} \quad \Rightarrow \quad \dot{z}(t) = \frac{qEt}{\sqrt{m^2c^2 + (qEt)^2}},$$

und wieder $p_z(t) = qEt$.

Für die Koordinaten haben wir $x(t), y(t) \equiv 0$, sowie

$$z(t) = \int_0^t dt \frac{qEt}{\sqrt{m^2c^2 + (qEt)^2}} = \frac{mc^2}{qE} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{qEt}{mc} \right)^2} - 1 \right).$$

9.34 Feldstärke- und Energie-Impuls-Tensor

1. Die Maxwell-Gleichungen, mit dem (dualen) Feldstärketensor ausgedrückt, sind

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0.$$

Zeigen Sie dies explizit indem Sie \vec{E} , \vec{B} , ρ und \vec{j} einsetzen.

2. Zeigen Sie, dass die beiden Gleichungen

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

einander äquivalent sind. Zeigen Sie außerdem, dass diese Beziehungen durch die Definition $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ automatisch erfüllt sind.

3. Der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes ist gegeben durch

$$T^\mu{}_\nu = -\frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\rho} F_{\nu\rho} - \frac{1}{4} \delta^\mu{}_\nu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right).$$

Zeigen Sie, dass in Abwesenheit äußerer Kräfte $F_{\mu\nu} j^\nu = 0$ gilt, indem Sie die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors, $\partial_\mu T^\mu{}_\nu$, berechnen und die Maxwell-Gleichungen benutzen.

Lösungen

1. Es ist

$$\partial_i F^{i0} = E^i, \quad \partial_i F^{ij} = \varepsilon^{0ijk} B_k, \quad \partial_i \tilde{F}^{i0} = B^i, \quad \partial_i \tilde{F}^{ij} = -\varepsilon^{0ijk} E_k.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} (\partial_\mu F^{\mu\nu}) &= \begin{pmatrix} \partial_i F^{i0} \\ \partial_0 F^{0j} + \partial_i F^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \\ -\frac{1}{c} \partial_t \vec{E} + \vec{\nabla} \times \vec{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\pi\rho \\ \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{pmatrix} = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \\ (\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}) &= \begin{pmatrix} \partial_i \tilde{F}^{i0} \\ \partial_0 \tilde{F}^{0j} + \partial_i \tilde{F}^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \\ -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B} - \vec{\nabla} \times \vec{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

2. Wir kontrahieren den ersten Ausdruck mit ε :

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}) = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\nu\rho} + \varepsilon^{\nu\rho\mu\sigma} \partial_\nu F_{\rho\mu} + \varepsilon^{\rho\mu\nu\sigma} \partial_\rho F_{\mu\nu} \\ &= 3\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\nu\rho} = 6\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\sigma}. \end{aligned}$$

Die Kontraktion mit ε lässt nur den total antisymmetrischen Teil übrig. Da der Ausdruck $\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}$ jedoch bereits total antisymmetrisch ist, fällt bei der Kontraktion mit ε nichts weg und die beiden Gleichungen sind äquivalent.

Setzen wir die Definition von F mit dem Vierervektorpotential A ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} &= \partial_\mu \partial_\nu A_\rho - \partial_\mu \partial_\rho A_\nu + \partial_\nu \partial_\rho A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A_\rho + \partial_\mu \partial_\rho A_\nu - \partial_\nu \partial_\rho A_\mu \\ &= 0, \end{aligned}$$

oder

$$-2\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 2\partial_\mu \tilde{F}^{\nu\mu} = \varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma = -\varepsilon^{\nu\rho\mu\sigma} \partial_\rho \partial_\mu A_\sigma = -\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma = 0.$$

3. In Abwesenheit äußerer Kräfte haben wir

$$\begin{aligned} 0 &= -4\pi \partial_\mu T^\mu{}_\nu = \partial_\mu \left(F^{\mu\rho} F_{\nu\rho} - \frac{1}{4} \delta^\mu{}_\nu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) \\ &= (\partial_\mu F^{\mu\rho}) F_{\nu\rho} + F^{\mu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} - \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} \\ &= \frac{4\pi}{c} F_{\nu\rho} j^\rho + F^{\mu\rho} \frac{1}{2} (\partial_\mu F_{\nu\rho} - \partial_\rho F_{\nu\mu}) - \frac{1}{2} F^{\mu\rho} \partial_\nu F_{\mu\rho} \\ &= \frac{4\pi}{c} F_{\nu\rho} j^\rho + F^{\mu\rho} \frac{1}{2} (\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu}) = \frac{4\pi}{c} F_{\nu\rho} j^\rho. \end{aligned}$$

9.35 Wirkung des elektromagnetischen Feldes

Betrachten Sie die Wirkung

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} j^\mu A_\mu + \frac{1}{8\pi c} \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} A^\mu A_\mu \right),$$

welche gegenüber der üblichen Wirkung des elektromagnetischen Feldes durch eine endliche Photonmasse m modifiziert wurde; das Planck'sche Wirkungsquantum \hbar ist eine Konstante von der Dimension einer Wirkung.

1. Welche Bewegungsgleichungen folgen aus dieser Wirkung, wenn Sie die Variation der Wirkung nach A_μ durchführen? Rechnen Sie in Lorenz-Eichung, $\partial_\mu A^\mu = 0$.
2. Zeigen Sie, dass die Wirkung invariant ist unter der Eichtransformation $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Psi$, wenn der Viererstrom erhalten bleibt, $\partial_\mu j^\mu = 0$, und die Photonmasse verschwindet, $m = 0$.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Felder im Unendlichen hinreichend schnell abfallen, so dass Randterme verschwinden.

Ergebnisse

1. Die Bewegungsgleichung wird allgemein

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu,$$

so dass für A und in Lorenz-Eichung folgt

$$\left(\partial^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu.$$

2. F ist eichinvariant,

$$\partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \Psi) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \Psi) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) \Psi.$$

Für den jA -Term erhalten wir mit partieller Integration

$$\int d^4x j^\mu (A_\mu + \partial_\mu \Psi) = \int d^4x j^\mu A_\mu + \underbrace{\int d^3x n_\mu j^\mu \Psi}_{=0} - \int d^4x \Psi \underbrace{\partial_\mu j^\mu}_{=0} = \int d^4x j^\mu A_\mu,$$

d. h., solange der Viererstrom erhalten bleibt, ist dieser Term eichinvariant. Für den Massenterm ergibt sich

$$\int d^4x (A^\mu + \partial^\mu \Psi)(A_\mu + \partial_\mu \Psi) = \int d^4x (A^\mu A_\mu + 2A^\mu \partial_\mu \Psi + \partial_\mu \Psi \partial^\mu \Psi).$$

Der letzte Term verschwindet, wenn man die Wirkung nach A variiert, der zweite Term jedoch nicht. Für $m \neq 0$ folgen aus dieser Wirkung also eichabhängige Bewegungsgleichungen.

9.36 Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformierte \tilde{f} einer Funktion f und die inverse Fourier-Transformation sind definiert durch

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int d^3x f(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\vec{x}}, \quad f(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}}.$$

Die Funktion f erfülle im Folgenden die mathematischen Voraussetzungen für die Existenz der Fourier-Transformierten. Nehmen Sie insbesondere an, dass f im Unendlichen verschwindet.

1. Zeigen Sie explizit, dass die inverse Fourier-Transformation der Fourier-Transformierten wieder in der Ausgangsfunktion resultiert, falls sich die Delta-Distribution als

$$\delta^3(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad (**)$$

darstellen lässt.

2. Zeigen Sie, dass Gl. (**) gilt, indem Sie einen Dämpfungsterm $-\epsilon(|k^1| + |k^2| + |k^3|)$, $\epsilon > 0$ einführen und erst nach der Berechnung des Integrals den Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ durchführen.
3. Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformation Ableitungen in einfache Produkte verwandelt, indem Sie die Fourier-Transformierte von $\partial_i f(\vec{x})$ berechnen.
4. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $f(x) = e^{-x^2/(2a)}$. Wie lässt sich das Ergebnis allgemein charakterisieren?

Lösungen

1.

$$f(\vec{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} = \int d^3 y f(\vec{y}) \underbrace{\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}}_{\stackrel{!}{=} \delta^3(\vec{x}-\vec{y})} = \int d^3 y f(\vec{y}) \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) = f(\vec{x}).$$

2. Da die einzelnen Dimensionen separieren, berechnen wir nur eine davon:

$$\int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx - \epsilon|k|} = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} e^{-k(\epsilon - ix)} + \int_{-\infty}^0 \frac{dk}{2\pi} e^{k(\epsilon + ix)} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\epsilon - ix} + \frac{1}{\epsilon + ix} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2}.$$

Der letzte Ausdruck geht für $\epsilon \rightarrow 0$ in die δ -Funktion über, da

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}, \quad \int dx \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2} = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{\epsilon} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} = 1.$$

3. Wegen $f(\pm\infty) = 0$ entstehen bei der partiellen Integration keine Randterme:

$$\widetilde{\partial_i f}(\vec{k}) = \int d^3 x (\partial_i f(\vec{x})) e^{i\vec{k}\vec{x}} = - \int d^3 x f(\vec{x}) \partial_i e^{i\vec{k}\vec{x}} = -i\vec{k} \tilde{f}(\vec{k}).$$

4.

$$\tilde{f}(k) = \int dx e^{-x^2/(2a) - ikx} = e^{-ak^2/2} \int dx e^{-(x+iak)^2/(2a)} = \sqrt{2\pi a} e^{-ak^2/2}.$$

Die Fourier-Transformierte einer Gauß-Kurve ist wieder eine Gauß-Kurve, aber die neue Standardabweichung ist der Kehrwert der alten.

9.37 Lösung der Wellengleichung

Sei $D(t, \vec{x})$ die Lösung der Wellengleichung,

$$\partial^2 D(t, \vec{x}) = (\partial_0^2 - \Delta) D(t, \vec{x}) = 0$$

zu den Anfangsbedingungen

$$D(0, \vec{x}) = 0, \quad (\partial_t D)(0, \vec{x}) = \delta^3(\vec{x}).$$

Die Fourier-Transformierte von D bezüglich der räumlichen Koordinaten lautet

$$\tilde{D}(t, \vec{k}) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i\omega}, \quad \omega = |\vec{k}|c.$$

Zeigen Sie, dass sich die inverse Fourier-Transformation von $\tilde{D}(t, \vec{k})$ schreiben lässt als

$$D(t, \vec{x}) = \frac{\delta(t - |\vec{x}|/c) - \delta(t + |\vec{x}|/c)}{4\pi c^2 |\vec{x}|}.$$

Ergebnis

Der obige Ausdruck für die inverse Fouriertransformierte lässt sich leicht berechnen, wenn wir das Koordinatensystem so legen, dass $\vec{k}\vec{x} = kr \cos\theta$ mit $r = |\vec{x}|$ ist und zusätzlich $\delta(ct \pm r) = c^{-1}\delta(t \pm r/c)$ benutzen.

9.38 Felder und Potentiale ebener Wellen

Betrachten Sie eine ebene Welle im Vakuum ($j^\mu = 0$) von der Form

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{E}_0(x, y) \sin(kz - \omega t), \quad \vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{B}_0(x, y) \sin(kz - \omega t),$$

wobei \vec{E}_0 und \vec{B}_0 beide in der xy -Ebene liegen.

1. Welche Beziehungen müssen zwischen k und ω sowie zwischen \vec{E}_0 und \vec{B}_0 herrschen und welche Bedingungen müssen \vec{E}_0 und \vec{B}_0 erfüllen, damit \vec{E} und \vec{B} die Maxwell-Gleichungen lösen?
2. Finden Sie für diese Felder das entsprechende Viererpotenzial (A^μ) mit

$$E^i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i, \quad B^i = -\varepsilon^{0ijk} \partial_j A_k,$$

welches sowohl die Lorenz-Eichung, $\partial_\mu A^\mu = 0$, als auch die Coulomb-Eichung, $\partial_i A^i = 0$, erfüllt.

3. Betrachten Sie nun eine ebene Welle mit dem Viererpotenzial,

$$\left(A^\mu(t, \vec{x}) \right) = \begin{pmatrix} a_0 \frac{\omega}{kc} + a_3 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_0 - a_3 \frac{\omega}{kc} \end{pmatrix} \cos(kz - \omega t),$$

welches eine Lösung der quellenfreien Maxwell-Gleichungen ist. Welche Bedingungen für die a_i lassen sich aus den Maxwell-Gleichungen für \vec{E} und \vec{B} ableiten? Welche der a_i sind eichabhängig?

Lösungen

1. Sei $\vec{k} = k\vec{e}_z$. \vec{E} und \vec{B} in die Maxwell-Gleichungen eingesetzt ergibt ($\vec{k}\vec{E}_0 = \vec{k}\vec{B}_0 = 0$)

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\vec{E}_0 = 0,$$

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\vec{B}_0 = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_0 \sin(kz - \omega t) + \left(\vec{k} \times \vec{E}_0 - \frac{\omega}{c} \vec{B}_0 \right) \cos(kz - \omega t) = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 \sin(kz - \omega t) + \left(\vec{k} \times \vec{B}_0 + \frac{\omega}{c} \vec{E}_0 \right) \cos(kz - \omega t) = 0.$$

Die ersten beiden Gleichungen ergeben bereits je eine Bedingung an \vec{E}_0 und \vec{B}_0 . Aus der dritten und vierten Gleichung folgt $\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = 0$ und $\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = 0$. Das sieht man daran, dass diese Rotationen parallel zu \vec{e}_z sind oder daran, dass $\sin \perp \cos$. Weiter folgt, wenn man die cos-Terme ineinander einsetzt:

$$\omega = kc, \quad \vec{n} = \frac{\vec{k}c}{\omega}, \quad \vec{B}_0 = \vec{n} \times \vec{E}_0.$$

2. Da \vec{E} und \vec{B} proportional zu $\sin(kz - \omega t)$ sind machen wir folgenden Ansatz

$$\Phi(t, x, y, z) = \Phi_0(x, y) \cos(kz - \omega t), \quad \vec{A}(t, x, y, z) = \vec{A}_0(x, y) \cos(kz - \omega t).$$

Das elektrische Feld lautet dann

$$\vec{E} \stackrel{!}{=} -\vec{\nabla}\Phi_0 \cos(kz - \omega t) + \vec{k}\Phi_0 \sin(kz - \omega t) - \frac{\omega}{c} \vec{A}_0 \sin(kz - \omega t).$$

Da $\vec{E} \perp \vec{k}$ folgt $\Phi_0 = 0$ und $\vec{A}_0 = -\vec{E}_0/k$. Für das magnetische Feld ergibt sich dann ($\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = 0$)

$$\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}_0 \sin(kz - \omega t).$$

Die Potentiale sind demnach

$$\Phi(t, x, y, z) = 0, \quad \vec{A}(t, x, y, z) = -\frac{\vec{E}_0(x, y)}{k} \cos(kz - \omega t).$$

Wegen $\vec{\nabla}\vec{E}_0 = \vec{k}\vec{E}_0 = 0$ erfüllen diese Potentiale sowohl die Lorentz- wie auch die Coulomb-Eichung.

3. Da dieses Potenzial (in passender Eichung) die Wellengleichung

$$\partial^2 A^\mu = 0$$

erfüllt, muss $\omega = kc$ gelten. Damit erhalten wir

$$\left(A^\mu(t, \vec{x}) \right) = \begin{pmatrix} a_0 + a_3 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_0 - a_3 \end{pmatrix} \cos(kz - \omega t).$$

Das elektromagnetische Feld lautet dann

$$\vec{E} = k \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ 2a_3 \end{pmatrix} \sin(kz - \omega t), \quad \vec{B} = k \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(kz - \omega t).$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ und $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{B} = 0$ bestimmen die Potentiale und geben damit keine Bedingungen an die a_i . Weiter erhalten wir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 2k^2 a_3 \cos(kz - \omega t) = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} = 2k^2 a_3 \cos(kz - \omega t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow a_3 = 0.$$

Die Maxwell-Gleichungen fordern also $a_3 = 0$, während $a_{0,1,2}$ beliebig sind. $a_{1,2}$ tauschen in \vec{E} und \vec{B} auf und stellen die beiden Freiheitsgrade des elektromagnetischen Feldes dar. Daher sind sie auch eichunabhängig, im Gegensatz zu a_0 .

9.39 Polarisation von Wellen

Gegeben sei eine Überlagerung zweier linear polarisierter Wellen mit gleichem Wellenvektor \vec{k} und der elektrischen Feldstärke

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{E}_1 \cos(k_\mu x^\mu) + \vec{E}_2 \cos(k_\mu x^\mu + \theta) \quad \text{mit} \quad \vec{E}_1 \vec{k} = \vec{E}_2 \vec{k} = 0.$$

Betrachten Sie o. B. d. A. eine Ausbreitung der Wellen in z -Richtung, d. h., wählen Sie $\vec{k} = k\vec{e}_z$. Es ist zweckmäßig, die Abkürzungen $\phi = kz - \omega t$ sowie

$$\begin{aligned} a_1 &= E_1^x + E_2^x \cos \theta, & b_1 &= E_2^x \sin \theta, \\ a_2 &= E_1^y + E_2^y \cos \theta, & b_2 &= E_2^y \sin \theta, \end{aligned}$$

einzuführen. Diskutieren Sie die Polarisation der elektrischen Feldstärke für die beiden Spezialfälle

1. $a_1 b_2 = a_2 b_1$

$$2. a_1 a_2 = -b_1 b_2 \text{ mit } a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2.$$

Ergebnisse

Mit $\vec{k} = k\vec{e}_z$ folgt $E_1^z = E_2^z = 0$. Mit den gegebenen Abkürzungen sowie

$$\cos(k_\mu x^\mu + \theta) = \cos(\phi - \theta) = \cos \phi \cos \theta + \sin \phi \sin \theta$$

wird die Feldstärke

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} a_1 \cos \phi + b_1 \sin \phi \\ a_2 \cos \phi + b_2 \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Mit $a_1/b_1 = a_2/b_2$ erhalten wir

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\cos \phi + \frac{b_1}{a_1} \sin \phi \right).$$

Beide Komponenten der elektrischen Feldstärke sind also in Phase und die resultierende Welle ist deswegen linear polarisiert.

2. Mit $a_1/b_1 = -b_2/a_2$ und $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2$ erhalten wir

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} a_1 \cos \phi + b_1 \sin \phi \\ \frac{a_2}{b_1} (a_1 \cos(\phi + \pi/2) + b_1 \sin(\phi + \pi/2)) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gibt hier also eine Phasenverschiebung von $\pi/2$. Wir können außerdem noch zeigen, dass

$$\begin{aligned} a_2^2 + b_2^2 &= (a_2^2 + b_2^2) \left(\frac{a_2}{b_1} \right)^2 \\ \Rightarrow |a_2/b_1| &= |b_2/a_1| = 1. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\left(\frac{E^x}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \right)^2 + \left(\frac{E^y}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \right)^2 = 1.$$

Dies ist eine Kreisgleichung, entspricht also zirkularer Polarisation.

9.40 Wellenpaket in einer Dimension

Gegeben sei ein Wellenpaket, das sich in die positive x -Richtung ausbreite,

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{a}(k) e^{-i\omega(k)t + ikx}.$$

1. Nehmen Sie an, dass $\omega(k)$ im Spektralbereich des Wellenpakets linear approximiert werden kann, d. h.

$$\omega(k) \approx \omega_0 + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}, \quad \omega_0 = \omega(k_0).$$

Zeigen Sie, dass sich das Wellenpaket mit der Gruppengeschwindigkeit $v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}$ unverändert fortpflanzt (bis auf eine ortsunabhängige Phasenverschiebung).

2. Untersuchen Sie nun den zeitlichen Verlauf des Wellenpakets für eine nichtlineare Dispersionsrelation mit

$$\omega(k) = \frac{1}{2} \alpha k^2$$

für den Fall, dass das Wellenpaket zum Zeitpunkt $t = 0$ die folgende Form habe

$$u(0, x) = u_0 \cos(k_0 x) e^{-x^2/(2\delta)}.$$

Ergebnisse

1. Es ist

$$u(0, x) = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{a}(k) e^{ikx} \quad \Rightarrow \quad \tilde{a}(k) = \tilde{u}(0, k).$$

Weiter haben wir, mit $\omega(k)$ eingesetzt,

$$u(t, x) = e^{-i(\omega_0 - v_g k_0)t} \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{u}(0, k) e^{ik(x - v_g t)} = e^{-i(\omega_0 - v_g k_0)t} u(0, x - v_g t).$$

D. h., das Wellenpaket zur Zeit t ergibt sich (bis auf den Phasenfaktor) aus dem Wellenpaket zu Zeit $t = 0$, um $v_g t$ nach rechts verschoben. Das Wellenpaket ändert also nicht seine Form.

2. Mit $\omega(k) = \alpha k^2/2$ erhalten wir für das zeitabhängige Wellenpaket nach längerer Rechnung

$$u(t, x) = \frac{u_0}{2\sqrt{1 + i\alpha t/\delta}} e^{-\frac{x^2/(2\delta) + i\omega(k_0)t}{(1 + i\alpha t/\delta)}} \left(e^{\frac{ik_0 x}{1 + i\alpha t/\delta}} + e^{-\frac{ik_0 x}{1 + i\alpha t/\delta}} \right).$$

Durch das t im Nenner und durch die k -abhängige Gruppengeschwindigkeit, $v_g = \alpha k$, zerfließt das Wellenpaket mit der Zeit und wird zudem gedämpft.

9.41 Elektromagnetische Strahlung einer Antenne

In einer linearen Stabantenne der Länge $2l$ fließe der Strom

$$\vec{j}(t, \vec{x}) = I\delta(x)\delta(y)\Theta(l - |z|)\left(1 - \frac{|z|}{l}\right)e^{-i\omega t}\vec{e}_z.$$

1. Zeigen Sie, dass das Vektorpotenzial der Antenne in der Fernzone gegeben ist durch

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{Il}{c} \frac{e^{ikr - i\omega t}}{r} \left(\frac{\sin \frac{klz}{2r}}{\frac{klz}{2r}}\right)^2 \vec{e}_z,$$

wobei $r = |\vec{x}|$, $k = \omega/c$. Verwenden Sie dazu die Näherungen $r \gg \lambda = 2\pi/k$ und $r \gg l$, machen Sie jedoch keine Annahme über das Größenverhältnis zwischen λ und l .

Hinweis: In führender Ordnung gilt

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|} \approx \frac{1}{r} e^{ikr} e^{-ik\vec{x}\vec{x}'/r}.$$

Warum? Unter welcher zusätzlichen Annahme finden Sie die Dipolnäherung wieder?

2. Berechnen Sie das \vec{B} -Feld in Kugelkoordinaten und daraus unter Verwendung der Maxwell-Gleichungen das \vec{E} -Feld. Beachten Sie, dass Sie in der Fernfeldnäherung nur Terme der Ordnung $1/r$ zu berücksichtigen brauchen.
3. Skizzieren Sie die Winkelverteilung der abgestrahlten Leistungsdichte.

Lösungen

1. In Lorenz-Eichung lautet das retardierte Vektorpotenzial

$$\begin{aligned} \vec{A}(t, \vec{x}) &= \int d^3x' \frac{\vec{j}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c, \vec{x}')/c}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \frac{I\vec{e}_z e^{-i\omega t}}{c} \int_{-l}^l dz' \frac{1 - |z'|/l}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}} e^{ik\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}}. \end{aligned}$$

Wegen $|\vec{x}| = r \gg l$ nähern wir zur Ordnung $1/r$,

$$\frac{\exp\left[ik\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}\right]}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}} \approx \frac{\exp[ikr]}{r} \exp\left[-ik\frac{zz'}{r}\right].$$

In der Dipolnäherung würde man zusätzlich noch $\lambda \gg l$ ansetzen und erhielte damit $kz' \ll 1$. In der Dipolnäherung würde demnach der letzte Term auch noch verschwinden.

Wir erhalten für das Vektorpotenzial

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{I \vec{e}_z e^{ikr - i\omega t}}{cr} \int_{-l}^l dz' \left(1 - \frac{|z'|}{l}\right) e^{-ikzz'/r}.$$

Für das Integral erhalten wir im Einzelnen

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l dz' e^{-ikzz'/r} &= 2l \frac{\sin \frac{klz}{r}}{\frac{klz}{r}}, \\ \int_{-l}^l dz' \frac{|z'|}{l} e^{-ikzz'/r} &= \int_0^l dz' \frac{2z'}{l} \cos kzz'/r = \frac{2r}{kz} \sin \frac{klz}{r} + \frac{2lr^2}{(klz)^2} (\cos lklz/r - 1) \\ &= 2l \frac{\sin \frac{klz}{r}}{\frac{klz}{r}} - l \left(\frac{\sin \frac{klz}{2r}}{\frac{klz}{2r}} \right)^2. \end{aligned}$$

Das Vektorpotenzial wird damit schließlich

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{Il}{c} \frac{e^{ikr - i\omega t}}{r} \left(\frac{\sin \frac{klz}{2r}}{\frac{klz}{2r}} \right)^2 \vec{e}_z.$$

2. Um das B -Feld auszurechnen, benutzen wir $\vec{e}_z = \vec{e}_r \cos \theta - \vec{e}_\theta \sin \theta$. Da sowohl $A_\varphi = 0$ als auch $\partial_\varphi A_i = 0$, hat das B -Feld nur eine φ -Komponente:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\vec{e}_\varphi}{r} (\partial_r(rA_\theta) - \partial_\theta A_r) = \vec{e}_\varphi \left(\partial_r A_\theta + \underbrace{\frac{A_\theta - \partial_\theta A_r}{r}}_{O(r^{-2})} \right) \approx \vec{e}_\varphi \partial_r A_\theta \approx \vec{e}_\varphi ik A_\theta.$$

Hier sind alle Terme vernachlässigt, die schneller als $1/r$ abfallen. Das B -Feld wird

$$\vec{B} = \frac{Ik l \sin(kr - \omega t)}{c} \frac{f(\theta)}{r} \vec{e}_\varphi, \quad f(\theta) = \sin \theta \left(\frac{\sin \frac{kl \cos \theta}{2}}{\frac{kl \cos \theta}{2}} \right)^2.$$

Da $\vec{k} \parallel \vec{e}_r$ und $\vec{B} \parallel \vec{e}_\varphi$, muss das E -Feld die Form $\vec{E} = E_\theta \vec{e}_\theta$ haben. Da \vec{E} außerdem nicht von φ abhängt, ergibt das Induktionsgesetz

$$\frac{\vec{e}_\varphi}{r} \partial_r(rE_\theta) = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B} = \frac{Ik^2 l \cos(kr - \omega t)}{c} \frac{f(\theta)}{r} \vec{e}_\varphi.$$

Wir sehen, dass $-\partial_t B_\varphi/c = \partial_r(rB_\varphi)/r$ und erhalten daher als Lösung

$$\vec{E} = B_\varphi \vec{e}_\theta.$$

3. Die abgestrahlte Leistungsdichte (Abb. 9.1) ist durch den Betrag des Poynting-Vektors \vec{S} gegeben:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B} = B_\varphi^2 \vec{e}_\varphi \Rightarrow |\vec{S}| \propto f^2(\theta).$$

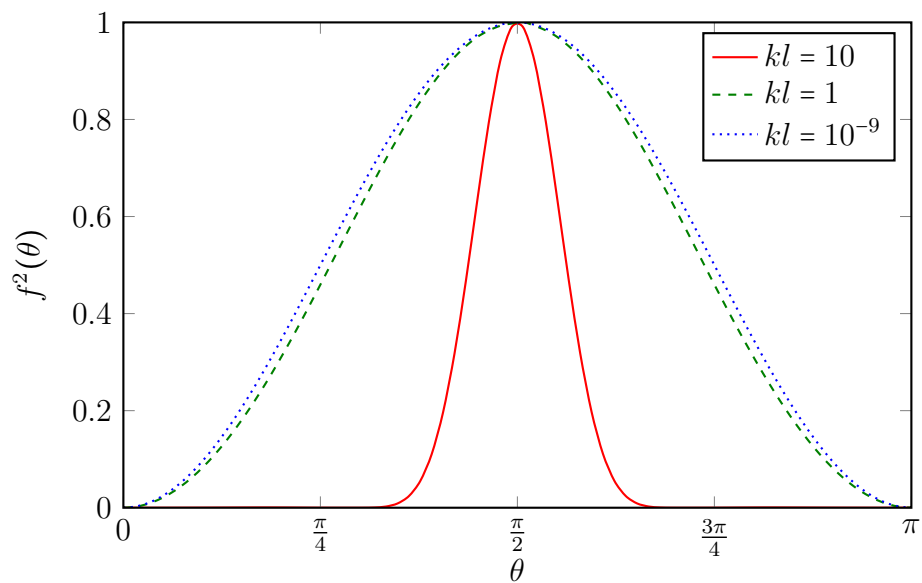


Abb. 9.1 Winkelverteilung der abgestrahlten Leistungsdichte einer Antenne für drei Werte von kl mit Antennenlänge $2l$ und Wellenzahl $k = \omega/c$

Literatur

- Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M.: The Feynman Lectures on Physics, Bd. II. Addison-Wesley, Reading (1966)
- Fließbach, T.: Elektrodynamik. SpringerSpektrum, Berlin, Heidelberg (2012)
- Greiner, W.: Classical Electrodynamics. Springer, New York (1998)
- Griffiths, D.J.: Elektrodynamik – eine Einführung. Pearson, London (2011)
- Jackson, J. D.: Klassische Elektrodynamik. De Gruyter, Berlin (2002)
- Landau, L. D., Lifschitz, E.: Bd. 2: Klassische Feldtheorie. Akademie-Verlag, Berlin (1981); Bd. 8: Elektrodynamik der Kontinua. Akademie-Verlag, Berlin (1990)
- Lorrain, P., Corson, D., Lorrain, F.: Electromagnetic Fields and Waves. 3. Aufl., W. H. Freeman, New York (1987)
- Maxwell, J. C.: On physical lines of force. Philosophical Magazine, Vols. 21, 23, Series 4, Part I – IV (1861)
- Nolting, W.: Grundkurs theoretische Physik, Bd. 3: Elektrodynamik. Springer, Berlin, Heidelberg (2013)
- Scheck, F.: Theoretische Physik 3 – Klassische Feldtheorie. Springer, Berlin, Heidelberg (2010)
- Sommerfeld, A.: Elektrodynamik. Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden (1948)

